Il Metodo Illustrato di Archimede

Usando la legge della leva per calcolare aree, volumi e centri di gravità



Andre Koch Torres Assis e
Ceno Pietro Magnaghi

Il Metodo Illustrato di Archimede:

Usando la legge della leva per calcolare aree, volumi e centri di gravità:

Andre K.T. Assis e C.P. Magnaghi

Apeiron
Montreal

Published by C. Roy Keys Inc.
4405, rue St-Dominique
Montreal, Quebec H2W 2B2 Canada
http://redshift.vif.com

First Published 2016

Library and Archives Canada Cataloguing in Publication

Assis, André Koch Torres, 1962-
[Illustrated method of Archimedes. Italian]
Il metodo illustrato di Archimede : usando la legge della leva per calcolare aree, volumi e centri di gravità / Andre K.T. Assis e C.P. Magnaghi.

Translation of: The illustrated method of Archimedes.
Includes bibliographical references.
Issued in print and electronic formats.
ISBN 978-1-987980-05-9 (paperback).--ISBN 978-1-987980-06-6 (pdf)

1. Mechanics. 2. Archimedes. I. Magnaghi, C. P. (Ceno Pietro), 1942-, author II. Title. III. Title: Illustrated method of Archimedes. Italian.

QA805.A8716 2016 531 C2016-904281-2
C2016-904282-0

Il Metodo Illustrato di Archimede: Usando la legge della leva per calcolare aree, volumi e centri di gravità



A. K. T. Assis e C. P. Magnaghi

δός μοι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν (Pappo)

datemi un punto d'appoggio e solleverò la terra.

André Koch Torres Assis e Ceno Pietro Magnaghi
Istituto de Fisica
Universidade Estadual de Campinas—UNICAMP
13083-859 Campinas - SP, Brasile

Emails: assis@ifi.unicamp.br e cenopietro@gmail.com
Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis



In copertina: Giulio Parigi (1571-1635), Firenze,
Galleria degli Uffizi, Stanzino delle Matematiche.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questo libro è una traduzione in italiano di un originale degli stessi autori pubblicato inizialmente in inglese e portoghese.[1]

1.1 Obbiettivo

Archimede scrisse i suoi trattati in un linguaggio complesso, a volte tanto complesso da sembrare perfino di voler sfidare i suoi interlocutori, Conone, Dositeo, Eratostene, che erano i più famosi matematici di quel tempo.

Molte traduzioni sono state fatte e molti libri sono stati scritti cercando di rendere più semplice l'interpretazione dei suoi trattati e di facilitare la comprensione dei suoi teoremi.

Il nostro obbiettivo con questo libro è di presentare l'esposizione matematica e fisica usata da Archimede nel suo trattato *Metodo sui Teoremi Meccanici*, rappresentando per mezzo di figure la sequenza del ragionamento dell'autore.

Crediamo che in questo modo il lettore possa vedere attraverso le figure delle leve in equilibrio nelle successive posizioni di ogni teorema, la semplicità del ragionamento di Archimede per arrivare al risultato finale.

Nell'introduzione del suo *Metodo*, dopo la lettera ad Eratostene, Archimede inizia subito presentando undici *Lemmi*, che saranno usati come base per le sue dimostrazioni. Alcuni di questi lemmi erano già stati dimostrati da altri matematici, altri lemmi invece si trovano in alcuni trattati dello stesso Archimede. Ma del lemma che si riferisce al centro di gravità del cono, non ci è pervenuta nessuna dimostrazione. Ispirati dal *Metodo* di Archimede, gli autori hanno voluto farne una dimostrazione che si trova nell'Appendice.

Infine, le idee rappresentate nelle figure possono servire, per fini didattici, come punto di partenza per una serie di esperimenti che si possono realizzare anche con materiali di basso costo, nella scuola secondaria.

---

[1] [AM12] e [AM14].

1.2 Breve Storia di Archimede

Archimede è una leggenda. Oltre ad essere stato uno dei più grandi scienziati di tutti i tempi e forse il più grande matematico dell'antichità, era anche una persona molto conosciuta e rispettata nella sua città natale, Siracusa, colonia greca nella Sicilia.

Sappiamo con certezza che morì nel 212 a.C., in quanto la sua morte avvenne durante la presa di Siracusa da parte dei romani durante la Seconda Guerra Punica[2] e questo fatto ci è pervenuto dalla descrizione di molti storici dell'epoca. Al contrario, quanto alla sua nascita e alla sua origine, abbiamo solo informazioni che sembrano di fonti abbastanza incerte, sulla base delle quali è comunemente accettato che sia nato attorno al 287 a.C.

Sembra che Archimede abbia passato la maggior parte della vita a Siracusa, dove avrebbe anche partecipato attivamente alla difesa della sua città natale contro i romani costruendo ordigni bellici, dei quali lui stesso non ci ha tramandato informazioni e che sembrano piuttosto dovuti alla fantasia degli storici[3] posteriori oppure a leggende dei suoi contemporanei.

Possiamo però affermare con relativa certezza che Archimede deve aver passato un certo tempo in Egitto, nella città di Alessandria che in quei tempi era il centro di scienza e cultura del mondo ed anche sede della famosa biblioteca. Questo lo sappiamo perché molte delle lettere contenenti i suoi trattati, erano indirizzate a Conone, Dositeo o Eratostene, scienziati del III secolo a.C e discepoli di Euclide ad Alessandria.

Nella biblioteca di Alessandria, a quell'epoca sotto la direzione di Eratostene, i libri più importanti erano studiati e copiati. Questa sembra essere l'origine da cui sono pervenuti i trattati di Archimede che oggi conosciamo. I matematici di Alessandria hanno continuato a studiare i testi del grande siracusano per molto tempo dopo la sua morte. Sappiamo che Erone di Alessandria, scienziato del I secolo d.C., interessato alla costruzione di una cupola, studiava i testi di Archimede per trovarne il volume.

1.3 I Trattati e la Storia del *Metodo sui Teoremi Meccanici*

Gli antichi papiri sui quali Archimede e i suoi contemporanei scrissero i loro trattati non sopravvissero al tempo; all'inizio dell'era cristiana, il papiro venne gradualmente sostituito dalla pergamena (pelle di animale trattata con processi chimici) più resistente e più facile da usare.

In questo passaggio le opere di Archimede si sarebbero perdute se non fosse stato per l'interesse di tre studenti di Alessandria: Eutocio di Ascalona (circa 480-540 d.C.), Antemio di Tralle (474-534 d.C.) e Isidoro di Mileto (480-540 d.C.).[4] Poco si conosce sulla vita di Eutocio tranne che è nato nel 480 d.C. e

[2] [Plu87, pp. 356-358].
[3] [Tit, XXIV, 34].
[4] [Mug72, Vol. IV, p. 1].

che ha studiato ad Alessandria dove si è interessato ai trattati di Archimede, che ha raccolto e commentato. Posteriormente, Antemio di Tralle e Isidoro di Mileto, che erano architetti, ricevettero l'incarico dall'imperatore Giustiniano (482-565 d.C.) di ricostruire la basilica di Santa Sofia a Costantinopoli, distrutta durante una rivolta nel 532 d.C. In questa occasione vollero mettere in pratica nella costruzione della cupola quanto imparato ad Alessandria negli studi sui trattati di Archimede. Così decisero di costruire la cupola della basilica come intersezione di due cilindri perpendicolari, il cui volume sarebbe stato trovato da Archimede nel suo *Metodo sui Teoremi Meccanici*,[5] anche se oggi non ci è arrivata la dimostrazione.

In questo modo le opere di Archimede sono passate da Alessandria a Costantinopoli (oggi Istanbul). Costantinopoli era l'antica città greca di Bisanzio, che fu designata dall'imperatore Costantino come capitale dell'Impero Romano e come tale visse un periodo di crescita e di splendore durante più di 400 anni. Gli imperatori dopo Costantino, non ostante le varie dispute per il potere, si mostrarono sempre interessati non solo all'aspetto militare ma anche a quello religioso e culturale. Così Antemio ed Isidoro, oltre che lasciarci una delle più belle costruzioni architettoniche dei tempi antichi, seppero trasmettere ai loro discepoli una grande ammirazione per l'opera del matematico siracusano. A Costantinopoli i trattati di Archimede vennero dunque studiati e copiati dando origine nel secolo IX ai *Codici A*, *B* e *C*.

Del *Codice A*, che conteneva la maggior parte dei trattati di Archimede e i *Commentari* di Eutocio, si sono perse le tracce nel secolo XVI. Fortunatamente prima di sparire ne sono state fatte copie e traduzioni. Il *Codice A* non conteneva né il trattato *Sui Corpi Fluttuanti* né il *Metodo*.[6]

Anche il *Codice B* si è perso nel Medio Evo, ma ci è pervenuta una traduzione in latino fatta da Guglielmo di Moerbeke nel 1269.

Il *Codice C* rimase sconosciuto fino al 1906. Si deve la sua scoperta al filologo danese Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) che dedicò gran parte della sua vita alla ricerca, traduzione e pubblicazione delle opere dei matematici greci, principalmente di Archimede. Nel 1880-1881 aveva già pubblicato la prima edizione moderna di tutte le opere di Archimede allora conosciute.[7] Nel 1906 scoprì a Costantinopoli un palinsesto,[8] la cui scrittura superiore era di preghiere mentre quella inferiore, parzialmente cancellata, rappresentava testi di matematica del IX o X secolo. Heiberg non faticò a riconoscere nel testo appena visibile, diverse opere di Archimede e riuscì a decifrare la maggior parte del palinsesto trovando vari frammenti delle seguenti opere del grande matematico siciliano:

- *Sulla Sfera e il Cilindro.*
- *Sulle Spirali.*

[5] [Arc14, p. 81]: "... la prop. 16, del tutto assente: la cubatura della volta, un solido ottenuto come intersezione di due cilindri retti a base circolare i cui assi sono ortogonali tra loro ..."

[6] [Mug70, Vol. I, p. xxiv].

[7] [Hei81].

[8] [Dij87].

- *Misura del Cerchio.*
- *Sull'Equilibrio dei Piani.*

Ma la straordinaria importanza di questo codice è dovuta al fatto che rappresenta l'unica fonte greca dei trattati:

- *Sui Galleggianti* (quasi completo).
- *Stomachion* (in parte).
- *Metodo sui Teoremi Meccanici* (completo).

Nel 1907 Heiberg pubblicò il testo originale greco con la traduzione in tedesco della lettera di Archimede a Eratostene che conteneva il *Metodo*.[9] Tra il 1910 e il 1915 pubblicò una nuova edizione completa delle opere di Archimede in greco e latino, dalla quale furono fatte traduzioni in diverse lingue.

La grande importanza della lettera di Archimede ad Eratostene risiede nel fatto che è uno dei pochi trattati (forse l'unico) in cui uno scienziato dei tempi antichi rivela il metodo di induzione usato per ottenere i suoi risultati.

[9] [Arc63].

Capitolo 2

I Principi Fisici del Metodo di Archimede

2.1 Il Centro di Gravità

2.1.1 Definizione del Centro di Gravità

Il "Centro di Gravità" o baricentro è un termine che ricorre con frequenza nelle opere di Archimede, ma nei suoi lavori che sono arrivati fino ai nostri giorni, non si trova una definizione di questo concetto. È probabile che questa definizione si trovasse in qualche libro oggi perduto, comunque questo importante concetto si può esprimere, a partire dalle opere che conosciamo oggigiorno, come segue:[1]

> Il centro di gravità di un corpo rigido è un punto tale per cui, immaginando di poter sospendere il corpo per questo punto e permettendogli di girare in tutti i sensi attorno ad esso, il corpo così sospeso rimarrebbe in riposo e manterrebbe il suo orientamento originale qualunque esso fosse in relazione alla Terra.

2.1.2 Determinazione Sperimentale del Centro di Gravità

Da quanto si può estrarre oggi dai libri di Archimede possiamo concludere che il matematico greco sapesse determinare sperimentalmente il centro di gravità dei corpi rigidi. Nella Proposizione 6 del suo lavoro sulla *Quadratura della Parabola*, egli affermava che:[2]

> ... infatti ogni corpo, sospeso per qualunque punto, con possibilità di stabilizzarsi, si equilibra in modo che il punto di sospensione e

[1] [Hea21, pp. 24, 301, 350-351 e 430], [Arc87, pp. 17, 47-48, 289-304, 315-316, 321-322 e 435-436], [Arc02b, pp. clxxxi-clxxxii], [Ass08, Sezione 4.9, pp. 90-91] e [Ass10, Capitolo 6, pp. 123-132].

[2] [Mug71a, Vol. II, p. 171, traduzione degli autori].

il centro di gravità del corpo sospeso, si trovino sulla (stessa) linea verticale; infatti questo è già stato dimostrato.

Sfortunatamente questa dimostrazione non si trova in nessuna delle opere di Archimede che sono arrivate ai nostri giorni.

Questa affermazione però suggerisce un procedimento pratico per trovare sperimentalmente il centro di gravità di un corpo.[3] Si sospende il corpo per un punto qualunque P_1. Si aspetta che il corpo entri in equilibrio rimanendo in riposo rispetto alla terra. Si traccia allora con il filo a piombo, una retta verticale passando per P_1. Sia E_1 il punto estremo del corpo lungo questa verticale, figura 2.1.

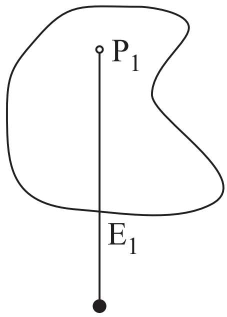


Figura 2.1: Si usa un filo a piombo per tracciare la linea verticale passando dal punto di sospensione P_1 fino all'estremità E_1 del corpo.

Si appende allora il corpo in un altro punto di sospensione P_2 che non si trovi lungo la prima verticale P_1E_1. Si aspetta che il corpo rimanga in equilibrio, in riposo rispetto alla terra, tracciando quindi una seconda verticale col filo a piombo, dal punto P_2. Sia E_2 l'altra estremità del corpo lungo la seconda verticale. L'intersezione delle due linee verticali P_1E_1 e P_2E_2 è il centro di gravità CG del corpo, figura 2.2.

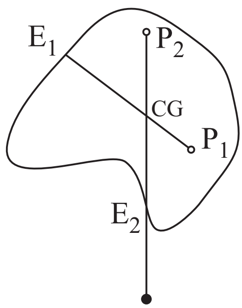


Figura 2.2: L'intersezione delle due verticali è il centro di gravità del corpo, CG.

[3][Ass08, Capitolo 4] e [Ass10, Capitolo 4].

Va sottolineato che, secondo Archimede, questo procedimento non è una definizione del centro di gravità. Questo risultato, cioè che il centro di gravità si trova all'incrocio delle verticali tracciate dai punti di sospensione del corpo, è stato provato teoricamente da Archimede usando una definizione preesistente del centro di gravità e altri postulati attualmente sconosciuti.

2.1.3 Determinazione Teorica del Centro di Gravità

Nei suoi lavori Archimede ha calcolato il centro di gravità di molte figure filiformi, piane e volumetriche.[4]

Uno dei suoi postulati più importanti che è stato usato per trovare la posizione di questi centri di gravità è descritto nel suo trattato *Sull'Equilibrio dei Piani*. Si tratta del ben noto sesto postulato:[5]

> Se grandezze stanno in equilibrio a certe distanze, anche grandezze equivalenti ad esse staranno in equilibrio alle stesse distanze.

Il significato di questo postulato così importante è stato chiarito da Vailati, Toeplitz, Stein e Dijksterhuis.[6] Con "grandezze a certe distanze", Archimede si riferisce a "grandezze i cui centri di gravità si trovano alla stessa distanza del fulcro della leva". Mentre il termine "grandezze equivalenti" si riferisce a "grandezze con lo stesso peso".

Vediamo un esempio del significato di questo postulato. Supponiamo che un sistema di corpi permettano alla leva di rimanere in equilibrio, ferma rispetto alla terra. Secondo questo postulato, un corpo qualunque A sospeso sulla leva può essere sostituito da un altro corpo B, senza modificare l'equilibrio della leva, purché siano soddisfatte le condizioni seguenti: (1) Il peso del corpo B deve essere uguale al peso del corpo A; e (2) la distanza del centro di gravità del corpo A al fulcro della leva deve essere uguale alla distanza del centro di gravità del corpo B al fulcro della leva.

Nel suo trattato *Sull'Equilibrio dei Piani* Archimede ha usato questo sesto postulato per dimostrare la legge della leva e per trovare la posizione del centro di gravità di un triangolo e di altre figure.[7]

Questo sesto postulato sarà essenziale anche per il metodo di Archimede che sarà visto nel Capitolo 4 di questo libro.

2.2 La Legge della Leva

La leva è una delle macchine semplici studiate nella Grecia antica; essa è costituita da un corpo rigido, tipicamente lineare, detto asta, che è in grado di

[4][Ass08, Sezione 6.2] e [Ass10, Sezione 6.2, pp. 132-136].

[5][Mug71a, Vol. II, p. 80, traduzione degli autori].

[6][Ste30], [Dij87, pp. 289-304 e 321-322], [Ass08, Sezione 9.7] e [Ass10, Sezione 7.1, pp. 209-215].

[7]Una discussione dettagliata di questo Postulato si trova in [Ass08, Sezione 9.7, pp. 200-208] e [Ass10, Sezione 10.7, pp. 209-217].

ruotare attorno ad un asse orizzontale, fisso rispetto al suolo. L'asse è ortogonale all'asta della leva; l'intersezione di questo asse con l'asta della leva, è chiamata fulcro o punto di sospensione della leva.

Come esempio di leva possiamo citare una bilancia di bracci uguali con la differenza che nella leva possiamo mettere i pesi a diverse distanze dal fulcro. Nelle figure di questo libro si considera che la leva sia simmetrica in relazione al piano verticale passante per il fulcro e che la sua asta sia lineare e rimanga orizzontale quando non ci sono corpi appoggiati.

Una leva è in equilibrio quando la sua asta rimane orizzontale, in riposo rispetto al suolo. La distanza orizzontale d tra il punto di sospensione di un corpo sull'asta e il piano verticale passante per il fulcro è chiamato braccio della leva. A volte potremo fare riferimento a questo braccio semplicemente come "distanza tra il corpo e il fulcro". Quando ci si riferisce ai due bracci di una leva, in questo libro, si sottintende che siano in parti opposte rispetto al fulcro.

Archimede ha dimostrato la legge della leva nelle Proposizioni 6 e 7 del suo trattato *Sull'Equilibrio dei Piani*:[8]

> Proposizione 6: Grandezze commensurabili stanno in equilibrio a distanze inversamente proporzionali ai loro pesi.
> Proposizione 7: E certamente allo stesso modo, qualora le grandezze siano incommensurabili, staranno in equilibrio a distanze inversamente proporzionali alle grandezze.

Heath ha riunito queste due proposizioni nella sua parafrasi del trattato di Archimede:[9]

> Proposizioni 6, 7: Due grandezze siano commensurabili [Prop. 6] oppure incommensurabili [Prop. 7], stanno in equilibrio a distanze inversamente proporzionali alle loro grandezze.

Supponiamo che i pesi P_A e P_B si trovino nei due bracci opposti di una leva in equilibrio, appesi coi rispettivi centri di gravità alle distanze d_A e d_B dal fulcro F, figura 2.3.

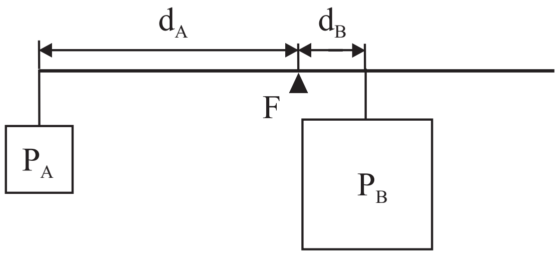


Figura 2.3: Leva in equilibrio sul fulcro F.

[8][Mug71a, Vol. II, p. 85, traduzione degli autori].
[9][Arc02b, p. 192], [Ass08, p. 171] e [Ass10, p. 176].

Secondo la legge della leva, affinché ci sia equilibrio deve verificarsi il seguente rapporto:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{P_B}{P_A} \ . \tag{2.1}$$

2.3 Il Metodo Meccanico di Archimede

Una volta stabiliti questi principi, possiamo riassumere brevemente il metodo meccanico di Archimede che sarà visto con maggiori dettagli nei prossimi capitoli:

1. Per determinare le caratteristiche di una figura di cui non si conosce l'area, il volume o la posizione del baricentro, Archimede usa una o più figure di cui si conoscono previamente queste caratteristiche.

2. Archimede immagina che queste figure siano sezionate da un piano, in tal modo che una superficie sia ridotta ad un segmento oppure un solido sia ridotto ad una superficie.

3. Partendo da osservazioni esclusivamente geometriche sulle figure considerate, Archimede determina proporzioni tra segmenti oppure tra segmenti ed aree.

4. Si attribuiscono ai segmenti e alle aree, pesi distribuiti in modo uniforme. In particolare, il peso di un segmento lineare è proporzionale alla sua lunghezza, il peso di una figura piana è proporzionale alla sua area, mentre il peso di un solido è proporzionale al suo volume.

5. Partendo dalle proporzioni determinate nel paragrafo 3 sopra, Archimede introduce la legge della leva, mostrando l'equilibrio esistente tra le varie sezioni ottenute secondo il paragrafo 2.

6. A questo punto Archimede immagina che le figure originali siano ottenute riempiendole con tutte le sezioni ottenute nel paragrafo 2, le quali si trovano in equilibrio sulla leva.

7. Dunque anche le figure originali si trovano in equilibrio sulla leva. Con questo si deduce facilmente la grandezza ricercata a partire dalle altre grandezze conosciute.

Capitolo 3

Archimede, il Circolo e la Sfera

Archimede ha sempre dimostrato un grande interesse nelle caratteristiche geometriche del cerchio e della sfera; a lui si deve il merito di aver trovato le proprietà principali di queste figure. Archimede sapeva che la lunghezza di una circonferenza era proporzionale al suo diametro. Il teorema mostrando tale proporzionalità dovrebbe essere espresso come segue:

> Le lunghezze di due circonferenze stanno tra di loro come i rispettivi diametri.

Siano c_1 e c_2 le lunghezze delle circonferenze di raggio r_1 e r_2 rispettivamente, come nella figura 3.1.

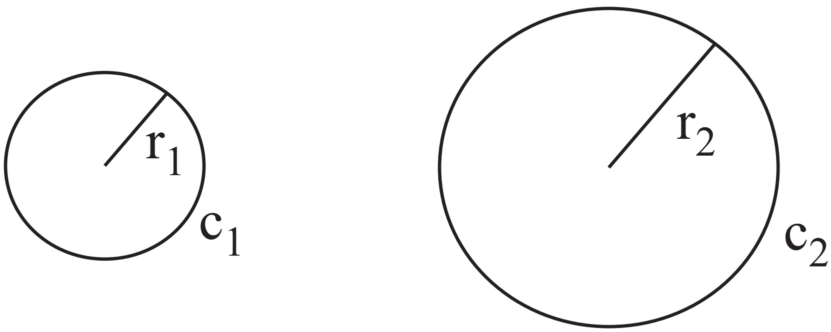


Figura 3.1: Circonferenze di raggio r_1 e r_2 e lunghezze c_1 e c_2, rispettivamente.

Siano $d_1 = 2r_1$ e $d_2 = 2r_2$ i diametri di questi cerchi. Il teorema della proporzionalità tra le lunghezze delle circonferenze e i rispettivi diametri può essere espresso matematicamente come:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{2r_1}{2r_2} = \frac{r_1}{r_2} \ . \tag{3.1}$$

Nel 1706 il matematico William Jones (1675-1749) introdusse l'uso del simbolo π per rappresentare il rapporto della circonferenza di un cerchio con il suo diametro. Questa definizione di π fu resa popolare dal famoso matematico e fisico Leonhard Euler (1707-1783) e si può rappresentare matematicamente come segue, considerando un cerchio qualunque con circonferenza c, diametro d e raggio r:

$$\pi \equiv \frac{c}{d} = \frac{c}{2r} \ . \tag{3.2}$$

Con questa definizione di π, la lunghezza di ogni circonferenza può essere espressa come:

$$c = 2\pi r \ . \tag{3.3}$$

Fu solo nel 1761 che il matematico J. H. Lambert (1728-1777) provò che π è un numero irrazionale, in modo che non si può esprimere come rapporto tra due numeri interi.

Anche senza aver mai citato la irrazionalità del rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro, Archimede ha ottenuto un'ottima approssimazione di questo rapporto nel suo trattato *Misura del Cerchio*.[1] In questo lavoro Archimede ha trovato i limiti superiore ed inferiore del rapporto tra circonferenza e diametro, inscrivendo e circoscrivendo ad un cerchio due poligoni regolari di n lati. La figura 3.2 mostra un cerchio con un esagono inscritto ed un altro circoscritto.

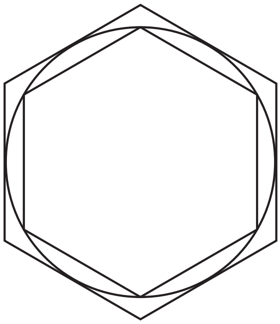


Figura 3.2: Cerchio con un esagono inscritto e un altro circoscritto.

Si intuisce che aumentando il numero n di lati dei poligoni, i perimetri dei due poligoni diventino sempre più prossimi alla circonferenza che si trova tra di loro. Inscrivendo e circonscrivendo ad un cerchio poligoni regolari di 96 lati, Archimede arrivò al risultato che segue:[2]

[1] [Arc02b, pp. 91-98].
[2] [Mug70, Vol. I, p. 140, traduzione degli autori].

La circonferenza di qualunque cerchio è tre volte il diametro, e (lo) eccede di una parte (del diametro) minore di un settimo ma maggiore di dieci settantunesimi.

L'espressione matematica di questo teorema si può rappresentare in questo modo:

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{c}{d} < 3 + \frac{1}{7} \ . \tag{3.4}$$

L'equazione (3.2) combinata con l'equazione (3.4) mostrano i seguenti limiti di π trovati da Archimede:

$$3,1408 < \pi < 3,1429 \ . \tag{3.5}$$

Questi valori approssimativi trovati da Archimede più di 2000 anni fa sono allo stesso tempo così semplici e così precisi che ancora oggi si possono usare nella maggior parte dei lavori di ingegneria e si insegnano nelle scuole di tutto il mondo.

Fino dai tempi dei matematici Eudosso (circa 390-338 a.C.) ed Euclide (circa 300 a.C.) si sapeva che l'area di un cerchio era proporzionale al quadrato del suo diametro. Il secondo teorema del libro XII degli *Elementi* di Euclide afferma che:[3]

I cerchi stanno tra di loro come i quadrati dei diametri.

Consideriamo i cerchi 1 e 2 della figura 3.1 con raggi r_1 e r_2, diametri $d_1 = 2r_1$ e $d_2 = 2r_2$, e con aree A_1 e A_2, rispettivamente. Questo teorema si esprime matematicamente come segue:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \ . \tag{3.6}$$

Ma anche in questo caso Archimede andò oltre le conclusioni ottenute da Eudosso ed Euclide, provando nel suo trattato *Misura del Cerchio*, che:[4]

Proposizione 1: Qualunque cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo, in cui il raggio è uguale a uno (dei lati) dell'angolo retto, mentre la circonferenza (è uguale) alla base.

Il risultato di questa proposizione è illustrato nella figura 3.3.

Sia A l'area di un cerchio con raggio r e circonferenza c. Sia A_T l'area di un triangolo rettangolo i cui lati adiacenti all'angolo retto siano r e c. Il risultato ottenuto da Archimede nel trattato *Misura del Cerchio* si esprime in questo modo:

---

[3] [Euc56, Proposizione 2, Libro XII, traduzione degli autori].

[4] [Mug70, Vol. I, p. 138, traduzione degli autori].

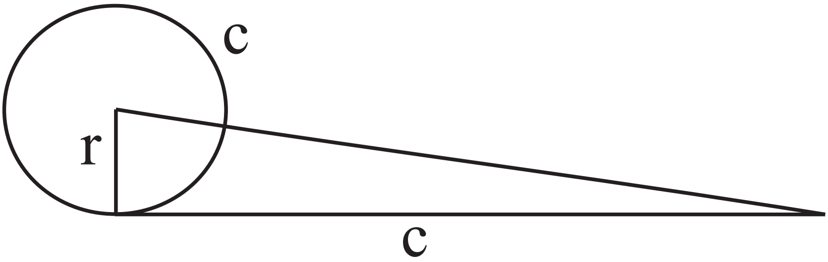


Figura 3.3: Archimede provò che un cerchio con una circonferenza c ed un raggio r ha la stessa area di un triangolo rettangolo con i lati c e r.

$$A = A_T = \frac{c \cdot r}{2} \ . \tag{3.7}$$

Combinando le equazioni (3.2), (3.3) e (3.7) si ottiene la formula moderna per calcolare l'area di un cerchio, cioè:

$$A = A_T = \frac{c \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 \ . \tag{3.8}$$

Dai tempi di Eudosso ed Euclide si sapeva anche che il volume di una sfera era proporzionale al cubo del suo diametro. La Proposizione 18 del libro XII degli *Elementi* di Euclide infatti afferma che:[5]

> Le sfere stanno tra di loro in rapporto triplo con i propri diametri.

Consideriamo allora due sfere i cui raggi siano r_1 e r_2, i diametri $d_1 = 2r_1$ e $d_2 = 2r_2$, e i volumi V_1 e V_2, rispettivamente. Questo teorema si esprime matematicamente come segue:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \ . \tag{3.9}$$

Ma Archimede è andato oltre questo risultato. Nel suo trattato *Sulla Sfera ed il Cilindro* ha provato altri tre risultati di somma importanza, cioè:[6]

> Proposizione 33: La superficie di qualunque sfera è il quadruplo del suo cerchio massimo.
> Proposizione 34: Qualunque sfera è il quadruplo del cono avente la base uguale al cerchio massimo della sfera e l'altezza (uguale) al raggio della sfera.
> Corollario: Dimostrato questo, è evidente che ogni cilindro la cui base è (uguale) al cerchio massimo della sfera e la cui altezza uguale

[5] [Euc56, traduzione degli autori].
[6] [Mug70, Vol. I, pp. 76, 78 e 81, traduzione degli autori].

> al diametro della sfera, è una volta e mezza la sfera, e la sua superficie insieme alle basi, (è) una volta e mezza la superficie della sfera.

Infatti chiamiamo A_S l'area di una sfera di raggio r, diametro $d = 2r$. Sia $A_{\text{Cerchio massimo}}$ l'area del cerchio massimo della sfera (ossia, l'area di un cerchio di raggio r passando per il centro della sfera). La proposizione 33 di Archimede si esprime matematicamente nel modo seguente:

$$A_S = 4A_{\text{Cerchio massimo}} . \tag{3.10}$$

Le equazioni (3.8) e (3.10) ci mostrano il risultato moderno dell'area della sfera come siamo abituati ad esprimerlo oggi:

$$A_S = 4A_{\text{Cerchio massimo}} = 4\pi r^2 . \tag{3.11}$$

Possiamo inoltre rappresentare la Proposizione 34 nella figura 3.4.

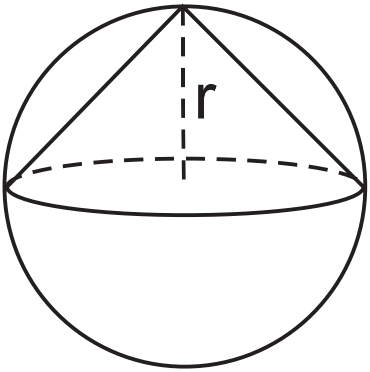


Figura 3.4: Il volume di ogni sfera è uguale a quattro volte il volume del cono la cui base è uguale al cerchio massimo della sfera e la cui altezza è uguale al raggio della sfera.

Chiamiamo V_S il volume di una sfera di raggio r e V_{Cono} il volume di un cono la cui base è uguale al cerchio massimo della sfera e la cui altezza è uguale al raggio della sfera. Matematicamente la Proposizione 34 diventa:

$$V_S = 4V_{Cono} . \tag{3.12}$$

Dai tempi di Democrito (circa 460-370 a.C.), Eudosso ed Euclide si sapeva già che il volume di un cono era un terzo del volume di un cilindro con la stessa base e la stessa altezza.[7] La Proposizione 10 del Libro XII degli *Elementi* di Euclide prova il seguente teorema:[8]

> Ogni cono è la terza parte di un cilindro avente la stessa base e altezza uguale.

[7] [Arc02a, p. 13], [Ass08, p. 34], [Ass10, p. 39] e [Mag, pp. 54 e 62].
[8] [Euc56, traduzione degli autori].

Questo teorema si trova illustrato nella figura 3.5.

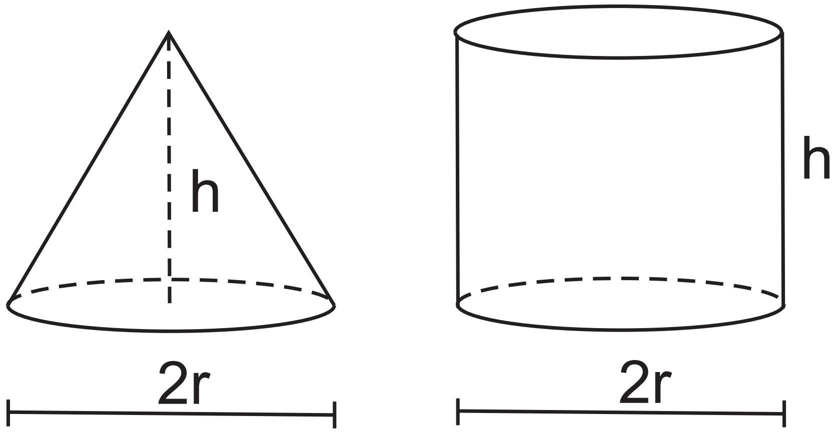


Figura 3.5: Il volume di un cono che ha per base un cerchio di raggio r ed un'altezza h, è uguale a un terzo del volume di un cilindro con la stessa base e la stessa altezza.

Sia V_{Cil} il volume di un cilindro e V_{Cono} il volume di un cono con la stessa altezza e con la base uguale a quella del cilindro. Questo teorema si scrive matematicamente come segue:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} V_{Cil} \ . \tag{3.13}$$

Le equazioni (3.12) e (3.13) ci forniscono allora il risultato:

$$V_S = 4V_{Cono} = \frac{4}{3} V_{Cil} \ . \tag{3.14}$$

Consideriamo adesso che il cono ed il cilindro abbiano l'altezza uguale al raggio della sfera, $h = r$, e le loro basi uguali al cerchio massimo della sfera, come nella figura 3.6.

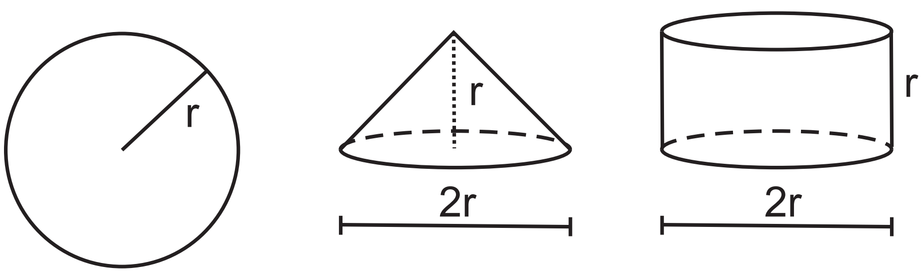


Figura 3.6: Una sfera di raggio r, un cono di altezza r e base uguale al cerchio massimo della sfera, ed un cilindro di altezza r e base uguale a quella del cono.

Il volume del cilindro dell'equazione (3.14) con altezza r è la metà del volume del cilindro di altezza $2r$ circoscritto alla sfera di raggio r, e mostrato nella figura 3.7.

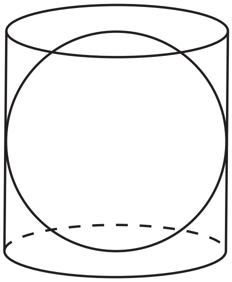


Figura 3.7: Sfera di raggio r con cilindro circoscritto, di altezza $2r$ e base uguale al cerchio massimo della sfera.

Sia $V_{Cilindro\ circoscritto}$ il volume del cilindro circoscritto ad una sfera di raggio r e volume V_S. L'equazione (3.14) si può allora esprimere nel seguente modo:

$$V_S = \frac{2}{3} V_{Cilindro\ circoscritto} \ . \tag{3.15}$$

Invertendo questa equazione si ottiene il risultato espresso da Archimede nel Corollario della Proposizione 34 del Libro I del suo trattato *Sulla Sfera e sul Cilindro*, cioè:

$$V_{Cilindro\ circoscritto} = \frac{3}{2} V_S \ . \tag{3.16}$$

Ma il volume del cilindro circoscritto alla sfera è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza $h = 2r$. Abbiamo anche visto dall'equazione (3.8) che l'area della base di questo cilindro è πr^2. Con questo si ottiene che il volume del cilindro circoscritto è dato da $\pi r^2 \cdot 2r$.

Sostituendo questo risultato nell'equazione (3.16) otteniamo:

$$V_{Cilindro\ circoscritto} = \frac{3}{2} V_S = \left(\pi r^2\right) \cdot (2r) \ . \tag{3.17}$$

Quest'ultima equazione non è altro che il modo moderno di rappresentare il volume V_S di una sfera di raggio r, cioè:

$$V_S = \frac{2}{3} V_{Cilindro\ circoscritto} = \frac{2}{3} \left(\pi r^2\right) \cdot (2r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \ . \tag{3.18}$$

Possiamo allora concludere che i risultati più importanti relativi al cerchio e alla sfera che usiamo oggigiorno, sono stati trovati da Archimede:

- Le eccellenti approssimazioni del limite superiore ed inferiore del rapporto tra la circonferenza di un cerchio ed il suo diametro, ossia, il valore del numero π;

- La lunghezza della circonferenza c di un cerchio di raggio r data da $c = 2\pi r$.
- L'area A di un cerchio di raggio r, che è data da $A = \pi r^2$.
- L'area A_S di una sfera di raggio r, che si ottiene con $A_S = 4\pi r^2$.
- Il volume V_S di una sfera di raggio r, che come abbiamo visto, è $V_S = 4\pi r^3/3$.

Le prove delle Proposizioni 33 e 34 del trattato *Sulla Sfera e il Cilindro* furono ottenute con dimostrazioni puramente geometriche. Solo con il ritrovamento del *Codice C* contenente il *Metodo* si venne a sapere in che modo Archimede riuscí ad ottenere questi risultati. Il suo metodo euristico usava la legge della leva in una brillante combinazione di fisica e di matematica, come vedremo di seguito.

Capitolo 4

Il Metodo Illustrato di Archimede

4.1 I Lemmi del *Metodo*

Archimede, subito dopo la lettera ad Eratostene, inizia il suo trattato presentandoci undici proposizioni (Lemmi) usate come base delle sue dimostrazioni, di cui trascriviamo solo quelle che saranno usati in questo libro.[1]

- Il centro di gravità di qualunque [segmento di] retta è il punto che lo divide in due parti uguali.
- Il centro di gravità di qualunque triangolo è il punto in cui si intersecano le rette tracciate dagli angoli del triangolo ai punti medi dei lati.
- Il centro di gravità di un cerchio è anche il centro del cerchio.
- Il centro di gravità di qualunque cilindro è il punto medio dell'asse.
- Il centro di gravità di qualunque cono è sull'asse e lo divide in modo che la parte prossima al vertice è il triplo della parte restante.

4.2 Dimostrazione Fisica del Teorema I: Area di un Segmento di Parabola

Ai tempi di Archimede la parabola era chiamata "sezione di cono retto", ma per semplicità, in questo libro continueremo ad usare il nome moderno. Rappresentiamo allora nella figura 4.1 una parabola $\rho\varphi\gamma$ con "vertice" φ e "diametro" $\varphi\eta$. Il "diametro", come era chiamato anche da Archimede, é l'asse di simmetria della parabola. "Vertice " è il punto d'incontro della parabola con il suo asse di simmetria.

[1] [Arc02a, pp. 14-15], [Ass08, pp. 130-131] e [Mag, pp. 106-107].

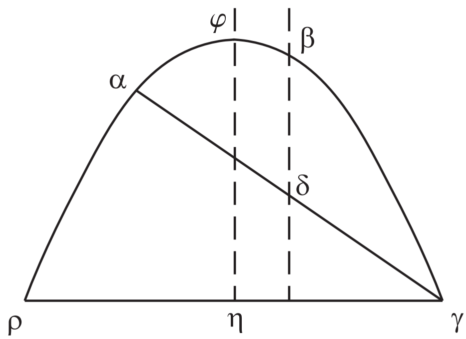


Figura 4.1: Parabola $\rho\varphi\gamma$ con vertice φ, diametro $\varphi\eta$, corda $\gamma\rho$ perpendicolare al diametro e divisa in due parti uguali dal punto η. Nella figura sono rappresentati anche la corda $\alpha\gamma$ inclinata in relazione alla base, il punto δ che la divide in due parti uguali ed il segmento $\beta\delta$ parallelo al diametro. Il segmento di parabola $\alpha\beta\gamma$ rappresenta evidentemente il caso generale.

La corda $\gamma\rho$, perpendicolare al diametro $\varphi\eta$, è la base del segmento di parabola $\rho\varphi\gamma$ e per simmetria η è il punto medio di $\gamma\rho$.

Tracciamo ora la corda $\alpha\gamma$ con una inclinazione qualunque in relazione alla base. Consideriamo il punto δ che divide la corda $\alpha\gamma$ in due parti uguali. Per il punto δ tracciamo una retta parallela al diametro $\varphi\eta$ che interseca la parabola nel punto β. I segmenti $\beta\delta$ e $\varphi\eta$ sono perciò paralleli per costruzione.

Nel caso particolare in cui il punto α coincida con il punto ρ, la corda $\alpha\gamma$ coinciderà con la corda $\gamma\rho$. In questo caso particolare la corda $\alpha\gamma$ sarà perpendicolare al diametro $\varphi\eta$, poiché il punto β coinciderà con il punto φ, mentre il punto δ coinciderà con il punto η, figura 4.2 (a).

Consideriamo però il caso generale di un segmento di parabola $\alpha\beta\gamma$, il cui diametro sia $\varphi\eta$ e la cui corda $\alpha\gamma$ sia inclinata in relazione alla base, come nella figura 4.2 (b). Tracciamo ora i segmenti $\alpha\beta$ e $\beta\gamma$, ottenendo il triangolo $\alpha\beta\gamma$.

Archimede provò che l'area del segmento parabolico $\alpha\beta\gamma$ è quattro terzi dell'area del triangolo $\alpha\beta\gamma$ inscritto nella parabola. Questa proposizione è valida non solo nel caso simmetrico in cui la corda $\alpha\gamma$ è perpendicolare al diametro $\varphi\eta$, figura 4.2 (a), ma anche nel caso generale in cui la corda $\alpha\gamma$ si trova inclinata come nella figura 4.2 (b).

Ossia, il rapporto seguente è valido qualunque sia il caso di un triangolo inscritto in un segmento di parabola:

$$\frac{\text{area del segmento di parabola } \alpha\beta\gamma}{\text{area del triangolo } \alpha\beta\gamma} = \frac{4}{3} \,. \tag{4.1}$$

Costruzione geometrica del Teorema I nel caso generale. La figura 4.3 rappresenta gli elementi principali per la prova di questo teorema.[2]

Sia $\alpha\beta\gamma$ un segmento di parabola delimitato dalla corda $\alpha\gamma$ e dalla parabola $\alpha\beta\gamma$. Sia δ il punto medio della retta $\alpha\gamma$. Dal punto δ tracciamo la retta

[2][Dij87, p. 317], [Arc02a, p. 16] e [Mag, p. 48].

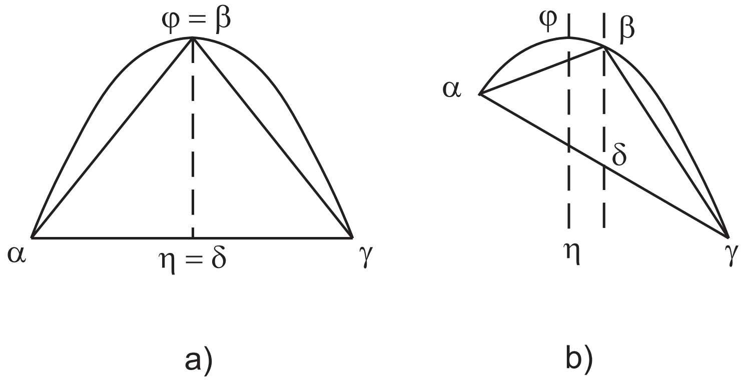


Figura 4.2: (a) Corda $\alpha\gamma$ perpendicolare al diametro $\varphi\eta$, che coincide con il segmento $\beta\delta$. (b) Corda $\alpha\gamma$ inclinata.

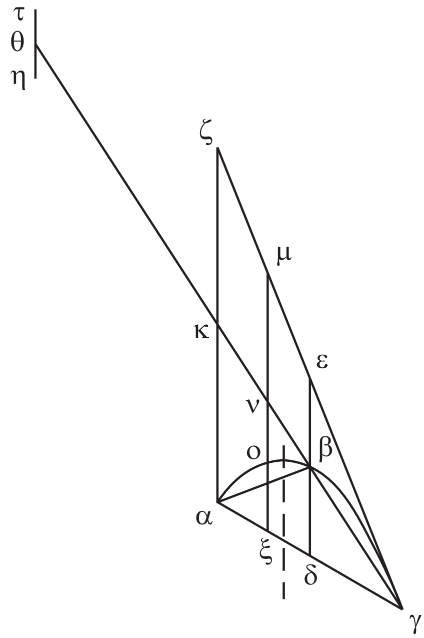


Figura 4.3: Costruzione geometrica del Teorema I nel caso generale. Il segmento tratteggiato è l'asse di simmetria della parabola o diametro.

$\beta\delta\varepsilon$ parallela al diametro della parabola. I segmenti $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ e la corda $\alpha\gamma$ definiscono il triangolo $\alpha\beta\gamma$ inscritto. Tracciamo dal punto α il segmento $\alpha\kappa\zeta$ parallelo al segmento $\varepsilon\delta$. Tracciamo ora la tangente alla parabola nel punto γ fino ad incontrare il segmento $\beta\delta\varepsilon$ nel punto ε e la prolunghiamo ancora fino ad incontrare il segmento $\alpha\kappa\zeta$ nel punto ζ. Prolunghiamo il segmento $\beta\gamma$ fino ad

incontrare $\alpha\zeta$ nel punto κ.

Continuiamo la costruzione della figura prolungando il segmento $\gamma\kappa$ fino al punto θ in modo che il segmento $\theta\kappa$ sia uguale al segmento $\kappa\gamma$. Consideriamo una retta generica $\mu\xi$ parallela al diametro della parabola tracciata a una qualsivoglia distanza dal segmento $\alpha\zeta$. Chiamiamo o (omicron) l'intersezione del segmento $\mu\xi$ con la parabola $\alpha\beta\gamma$ e ν l'intersezione dei segmenti $\mu\xi$ e $\kappa\gamma$.

Nella Proposizione 2 del suo trattato *Quadratura della Parabola*, Archimede ha provato che il punto β divide il segmento $\varepsilon\delta$ in due parti uguali.[3] Per similitudine di triangoli si trova facilmente che i punti κ e ν sono i punti medi dei segmenti $\alpha\zeta$ e $\mu\xi$ rispettivamente.

Partendo dalla geometria della figura 4.3 Archimede prova nel *Metodo*, la proporzione seguente:[4]

$$\frac{\theta\kappa}{\kappa\nu} = \frac{\mu\xi}{o\xi} \ . \qquad (4.2)$$

Adesso possiamo vedere la parte più interessante del metodo di Archimede, che attribuisce ai segmenti $\mu\xi$ e $o\xi$ un peso proporzionale alle rispettive lunghezze. Inoltre considera il segmento $\theta\gamma$ come l'asta di una leva con fulcro nel suo punto medio κ.

Consideriamo ora un segmento $\tau\eta$ uguale al segmento $o\xi$ e lo appoggiamo con il suo centro di gravità nel punto θ; perciò avremo $\tau\theta = \theta\eta$. Il punto ν è il centro di gravità del segmento $\mu\xi$, mentre il punto θ è il centro di gravità del segmento $\tau\eta$. Combinando la legge della leva, equazione (2.1), con l'equazione (4.2), possiamo concludere che l'asta della leva $\theta\gamma$ rimarrà in equilibrio sul punto κ finché il segmento $\mu\xi$ resti appoggiato sul punto ν ed il segmento $o\xi$ (uguale a $\tau\eta$) resti appoggiato sul punto θ. Questa situazione di equilibrio è rappresentata nella figura 4.4.

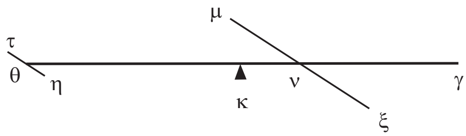


Figura 4.4: Equilibrio dei segmenti di retta $\tau\eta$ e $\mu\xi$ appoggiati su di una leva orizzontale con fulcro nel punto κ.

Questa leva in equilibrio è rappresentata matematicamente dalla seguente equazione:

$$\frac{\theta\kappa}{\kappa\nu} = \frac{\mu\xi}{\tau\eta} \ . \qquad (4.3)$$

Lo stesso ragionamento vale per tutte le altre rette parallele al diametro (come $\delta\varepsilon$) e che intersecano l'arco della parabola, nelle quali possiamo identificare

[3] [Arc02b, p. 235].
[4] [Arc02a, p. 16] e [Mag, p. 47].

due segmenti di retta (a) e (b) che staranno in equilibrio quando appoggiati con i loro centri di gravità sull'asta $\theta\gamma$ di questa leva con fulcro in κ.

Questi segmenti di retta sono: (a) il segmento ($\mu\xi$) compreso tra $\zeta\gamma$ e $\alpha\gamma$ con il suo punto medio lungo $\kappa\gamma$, e (b) il segmento di retta ($\tau\eta$) uguale all'intersezione tra la parabola ed il segmento $\alpha\gamma$, appoggiato sulla leva con il suo centro di gravità in θ. Tutti i segmenti di retta $o\xi$ compresi tra $\alpha\xi = 0$ fino a $\alpha\xi = \alpha\gamma$ costituiscono il segmento parabolico $\alpha\beta\gamma$ che si appoggiano sulla leva solamente nel punto θ. Tutti i segmenti di retta $\mu\xi$ costituiscono il triangolo $\alpha\zeta\gamma$ distribuito lungo il segmento $\kappa\gamma$. Qui possiamo ricordare che questo stesso concetto è stato ripreso da Galileo:[5]

> [...] la qual infinità di linee ci rappresenta in ultimo la superficie del triangolo [...]

In questo modo si ottiene una leva che rimane in equilibrio sul fulcro κ con il segmento parabolico $\alpha\beta\gamma$ appoggiato sulla leva con il suo baricentro collocato verticalmente sotto il punto θ, mentre il triangolo $\alpha\zeta\gamma$ rimane distribuito lungo il braccio $\kappa\gamma$ della leva. Questa leva in equilibrio è rappresentata nella figura 4.5 con il segmento parabolico appeso nel punto θ con un filo senza peso e con il suo baricentro che si trova nella verticale sotto il punto θ.

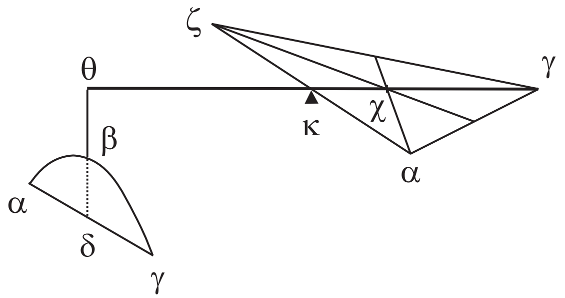


Figura 4.5: La leva orizzontale $\theta\gamma$ rimane in equilibrio appoggiata sul fulcro κ quando il segmento parabolico $\alpha\beta\gamma$ è appeso con un filo senza peso nel punto θ e con il suo baricentro collocato verticalmente al di sotto di θ, mentre il triangolo $\alpha\zeta\gamma$ si trova con il peso distribuito lungo il braccio $\kappa\gamma$ della leva. La linea $\beta\delta$ rappresenta il diametro della parabola.

Per il sesto postulato del suo trattato *Sull'Equilibrio dei Piani*, già citato nella Sezione 2.1.3, questa leva rimarrà in equilibrio sul fulcro κ se il triangolo $\alpha\zeta\gamma$ fosse appeso con un filo senza peso, solo nel punto corrispondente al suo baricentro. Ossia, si ritira il triangolo col suo peso distribuito lungo il braccio $\gamma\kappa$, e si appende solamente nel punto χ che corrisponde al baricentro del triangolo.

[5][Gal70, p. 278].

La posizione del baricentro di un triangolo si trova seguendo le Proposizioni 13 e 14 del trattato *Sull'Equilibrio dei Piani* dello stesso Archimede.[6] Questo risultato corrisponde ad uno dei lemmi considerati nella Sezione 4.1.

Considerando ora il triangolo dela figura 4.5, vediamo che il segmento $\kappa\gamma$ congiunge il vertice γ col punto medio κ del lato opposto $\zeta\alpha$. E ricordando il lemma sul triangolo all'inizio di questo capitolo, il baricentro di questo triangolo si trova nel punto χ del segmento $\kappa\gamma$, dividendolo in modo che:

$$\frac{\kappa\gamma}{\kappa\chi} = \frac{3}{1} \ . \tag{4.4}$$

Per questo la leva rimane in equilibrio anche nella situazione della figura 4.6, in cui il triangolo si trova appeso per il suo baricentro.

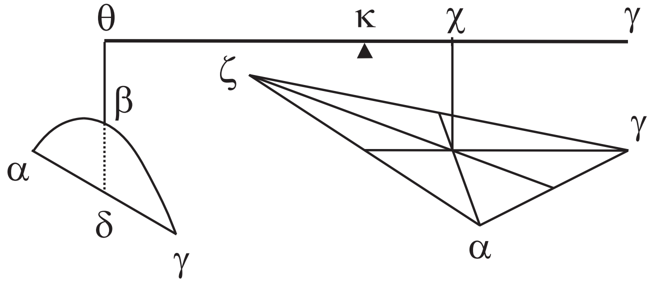


Figura 4.6: La leva orizzontale rimane in equilibrio appoggiata sul fulcro κ col segmento parabolico $\alpha\beta\gamma$ appeso con un filo senza peso nel punto θ, mentre il triangolo $\alpha\zeta\gamma$ è appeso con un filo senza peso nel punto χ, scelto in tal modo che $\kappa\chi = \kappa\gamma/3$.

Secondo la legge della leva, equazione (2.1), considerando la proporzionalità tra pesi ed aree, e con l'equazione (4.4), possiamo rappresentare matematicamente l'equilibrio della figura 4.6 come segue:

$$\frac{\text{area del segmento parabolico } \alpha\beta\gamma}{\text{area del triangolo } \alpha\zeta\gamma} = \frac{\kappa\chi}{\theta\kappa} = \frac{1}{3} \ . \tag{4.5}$$

Ma dalla figura 4.3 si può provare che:

$$\text{area del triangolo } \alpha\zeta\gamma = 4(\text{area del triangolo } \alpha\beta\gamma) \ . \tag{4.6}$$

Allora con le equazioni (4.5) e (4.6) otteniamo il risultato seguente:

$$\frac{\text{area del segmento parabolico } \alpha\beta\gamma}{\text{area del triangolo } \alpha\beta\gamma} = \frac{4}{3} \ . \tag{4.7}$$

Questo è il risultato finale ottenuto da Archimede, conosciuto come *Quadratura della Parabola.* Il calcolo dell'area di un segmento parabolico è stato

[6][Arc02b, pp. 198-201], [Dij87, pp. 309-312], [Ass08, pp. 205-208 e 235-238] e [Ass10, pp. 215-217].

ottenuto dalla combinazione di deduzioni puramente geometriche con la legge della leva. Nelle parole dello stesso Archimede:[7]

> Qualunque segmento delimitato da una retta e una parabola è quattro terzi del triangolo avente la stessa base e altezza uguale.

4.2.1 Importanza del Teorema I

In questa sezione vogliamo sottolineare gli aspetti più importanti di questo teorema:

- Archimede cita nella sua lettera a Eratostene che questo è stato il primo teorema che egli scoprì con il metodo meccanico.[8] Per questo non dobbiamo considerare una coincidenza il fatto che Archimede abbia voluto presentare questo risultato come il primo teorema del suo trattato.

- La prova di questo teorema era già stata dimostrata precedentemente da Archimede in un altro trattato: *Quadratura della Parabola*.[9] Questo trattato, pervenuto fino ai nostri giorni, fu mandato da Archimede a Dositeo di Pelusio, discepolo del matematico e astronomo Conone di Samo, con una lettera in cui Archimede dichiarava:[10]

  > [...] decisi di mandarti per iscritto, come avevo pensato di scrivere a Conone, uno dei teoremi geometrici che non era stato studiato anteriormente, ma che ora io studiai, trovando (la soluzione) prima per via meccanica e dopo dimostrando per via geometrica.

  A questo punto è importante sottolineare due fatti. In primo luogo, è chiaro che Archimede fu il primo matematico ad ottenere la quadratura della parabola.[11] Nessuno prima di lui aveva enunciato questo risultato e nemmeno presentato una dimostrazione con il calcolo dell'area di un segmento parabolico. In secondo luogo, lo stesso Archimede ci informa, come abbiamo visto qui sopra, che questo risultato lo aveva ottenuto inizialmente per via meccanica, ossia usando la legge della leva come descritto nel suo *Metodo sui Teoremi Meccanici* (posteriormente trovò la prova geometrica inviata a Dositeo con il trattato *Quadratura della Parabola*). Solo con il ritrovamento del palinsesto nel 1906, dopo più di 2000 anni, ci fu rivelato il metodo meccanico usato da Archimede. Una leva in equilibrio sotto l'azione della forza di gravità, con un segmento parabolico e un triangolo sospesi nei bracci, a determinate distanze dal fulcro, come si mostra nella figura 4.6. Conoscendo il baricentro del triangolo, con l'equazione (4.4),

[7] [Mug71a, Vol. II, p. 193, traduzione degli autori].
[8] [Arc02a, p. 14], [Ass08, p. 34] e [Mag, p. 106].
[9] [Arc02b, pp. 233-252].
[10] [Mug71a, Vol. II, p. 164, traduzione degli autori].
[11] [Arc14, p. 50].

l'equilibrio della leva ci permette di determinare l'area del segmento parabolico in funzione dell'area del triangolo con la stessa base e la stessa altezza della parabola.

- Questo procedimento si può anche invertire. Nel suo trattato *Quadratura della Parabola* Archimede dimostra geometricamente che qualunque segmento parabolico è uguale a quattro terzi del triangolo con la stessa base e la stessa altezza.[12] Partendo da questo risultato puramente geometrico e usando la legge della leva, equazione (2.1), insieme alla configurazione di equilibrio rappresentata nella figura 4.6, si può allora trovare il baricentro di un triangolo come nell'equazione (4.4). Questo argomento suggerisce allora un terzo procedimento per trovare il baricentro di un triangolo oltre agli altri due presentati da Archimede nel suo trattato *Sull'Equilibrio dei Piani*.[13]

- In questo teorema Archimede ottenne l'area di un segmento parabolico in funzione dell'area di un triangolo con la stessa base e la stessa altezza. Qui possiamo sottolineare l'importanza del risultato che permise di ottenere l'area di una superficie delimitata da una curva, la parabola, in funzione dell'area di un poligono, il triangolo.

4.3 Dimostrazione Fisica del Teorema II: Volume di una Sfera

Nel primo teorema abbiamo visto Archimede trovare col suo metodo l'area di una superficie piana. In questo secondo teorema il matematico siracusano ci mostra come trovare il volume di una sfera; infatti egli dice:[14]

> [...] che qualunque sfera è il quadruplo del cono avente la base uguale al cerchio massimo della sfera e altezza uguale al raggio della sfera; ed il cilindro avente la base uguale al cerchio massimo della sfera e altezza uguale al diametro della sfera è una volta e mezza la sfera [...]

Per trovare questi risultati consideriamo la figura 4.7, mostrando cinque solidi nello spazio tridimensionale: la sfera $\alpha\beta\gamma\delta$, i coni $\alpha\beta\delta$ e $\alpha\zeta\varepsilon$ ed i cilindri $\eta\zeta\varepsilon\lambda$ e $\psi\omega\chi\varphi$.

Osserviamo allora la figura 4.8 che rappresenta la figura 4.7 nella vista laterale.

Sia $\alpha\beta\gamma\delta$ il cerchio massimo di una sfera il cui centro è κ con i diametri $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$ rispettivamente perpendicolari. Tracciamo un cerchio in un piano perpendicolare ad $\alpha\gamma$ avente per diametro il segmento $\beta\delta$. Consideriamo il cono

[12] [Arc02b, pp. 233-252] e [Ass08, pp. 24, 34 e 131].

[13] [Arc02b, pp. 198-201], [Dij87, pp. 309-312], [Ass08, Sezione B.2, pp. 222-240] e [Ass10, Sezione 10.7.2, pp. 215-217].

[14] [Mug71b, Vol. III, p. 88, traduzione degli autori].

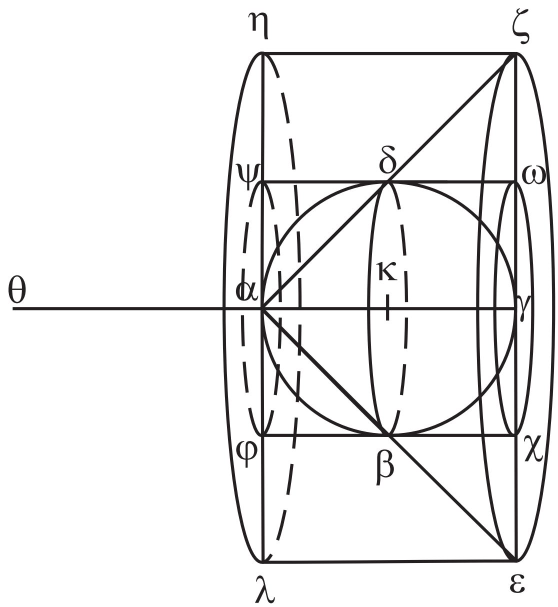


Figura 4.7: La sfera $\alpha\beta\gamma\delta$, i coni $\alpha\beta\delta$ e $\alpha\zeta\varepsilon$, insieme ai cilindri $\eta\zeta\varepsilon\lambda$ e $\psi\omega\chi\varphi$, visti in prospettiva.

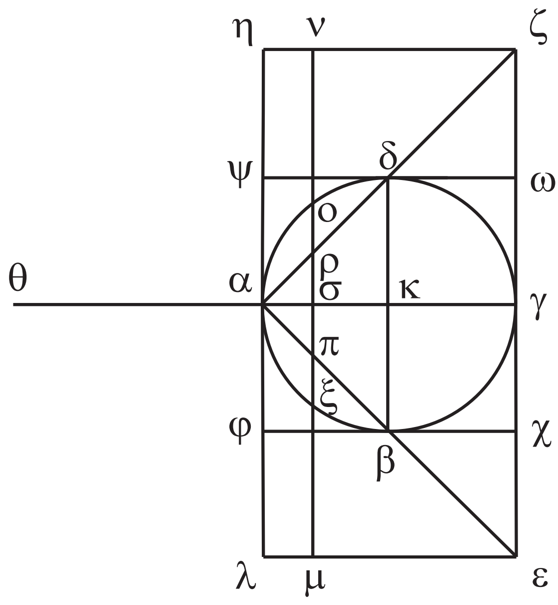


Figura 4.8: La sfera $\alpha\beta\gamma\delta$, i coni $\alpha\beta\delta$ e $\alpha\zeta\varepsilon$, insieme ai cilindri $\eta\zeta\varepsilon\lambda$ e $\psi\omega\chi\varphi$, visti lateralmente.

$\alpha\beta\delta$ avente per base questo cerchio e il punto α come vertice. Prolunghiamo la superficie laterale di questo cono e la sezioniamo con un piano passante per il punto γ e parallelo alla base del cono $\alpha\beta\delta$. Questa sezione del cono, passante per il punto γ sarà un cerchio avente per diametro il segmento $\zeta\varepsilon$. Abbiamo formato in questo modo un cono maggiore, $\alpha\zeta\varepsilon$, il cui vertice è lo stesso punto α.

Considerando il cerchio $\zeta\varepsilon$ come base si costruisce il cilindro $\eta\zeta\varepsilon\lambda$ avente il segmento $\alpha\gamma$ come altezza e come asse. In seguito si costruisce un cerchio con il segmento $\omega\chi$ come diametro, in un piano perpendicolare a $\alpha\gamma$. Usando questo cerchio come base, si costruisce allora un cilindro minore $\psi\omega\chi\varphi$, anch'esso avente il segmento $\alpha\gamma$ come altezza e come asse. Prolunghiamo ora il segmento $\alpha\gamma$ fino al punto θ, facendo il segmento $\theta\alpha$ uguale al segmento $\alpha\gamma$.

Tracciamo ora una retta generica $\mu\nu$ nel piano del cerchio $\alpha\beta\gamma\delta$, parallela al segmento $\beta\delta$, come mostrato nella figura 4.8. Il segmento $\mu\nu$ incontra il cerchio nei punti o e ξ, il diametro $\alpha\gamma$ nel punto σ, e le rette $\alpha\zeta$ e $\alpha\varepsilon$ rispettivamente nei punti ρ e π.

Attraverso $\mu\nu$ tracciamo un piano perpendicolare al segmento $\alpha\gamma$. Questo piano seziona il cilindro maggiore $\eta\zeta\varepsilon\lambda$ in un cerchio di diametro $\mu\nu$, la sfera in un cerchio di diametro $o\xi$, ed il cono maggiore $\alpha\zeta\varepsilon$ in un cerchio di diametro $\rho\pi$. Tutti questi cerchi hanno lo stesso centro nel punto σ, figura 4.9.

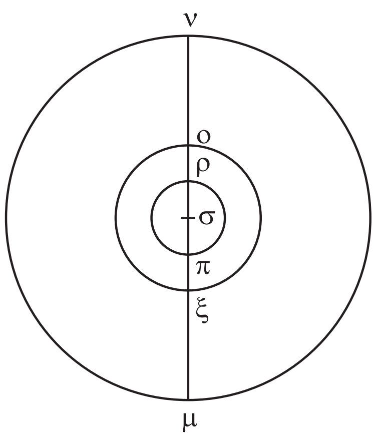


Figura 4.9: Il piano passante per il segmento $\mu\nu$, ortogonale al segmento $\alpha\gamma$, seziona il cilindro maggiore $\eta\zeta\varepsilon\lambda$ in un cerchio di diametro $\mu\nu$, la sfera in un cerchio di diametro $o\xi$, sezionando anche il cono maggiore $\alpha\zeta\varepsilon$ in un cerchio di diametro $\rho\pi$. Tutti questi cerchi hanno lo stesso centro nel punto σ.

Partendo dalla geometria della figura 4.8 Archimede trovò la relazione seguente:[15]

$$\frac{\theta\alpha}{\alpha\sigma} = \frac{\mu\nu \cdot \mu\nu}{o\xi \cdot o\xi + \rho\pi \cdot \rho\pi} \,. \tag{4.8}$$

[15][Arc02a, p. 19] e [Mag, p. 52].

Fino dai tempi di Eudosso ed Euclide si sapeva che:[16]

I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri.

Perciò l'equazione (4.8) si può scrivere come:

$$\frac{\theta\alpha}{\alpha\sigma} = \frac{\text{Cerchio di diametro } \mu\nu}{(\text{Cerchio di diametro o}\xi) + (\text{Cerchio di diametro } \pi\rho)} . \tag{4.9}$$

Seguendo il suo metodo, Archimede considera allora che i cerchi $\mu\nu$, $o\xi$ e $\rho\pi$ abbiano un peso proporzionale alla loro area. Considera anche che il segmento $\theta\gamma$ sia l'asta di un leva orizzontale co il fulcro in α, e che il punto α divida il segmento $\theta\gamma$ in due parti uguali. Combinando la legge della leva, equazione (2.1), con l'equazione (4.9) concludiamo che questa leva rimarrà in equilibrio con il cerchio di peso $\mu\nu$ rimanendo dove si trova, sospeso appena con il suo centro di gravità nel punto σ, mentre simultaneamente i cerchi di peso $o\xi$ e $\rho\pi$ sono messi all'estremità della leva, con i loro centri di gravità nel punto θ. Rappresentiamo questo stato di equilibrio nella figura 4.10.

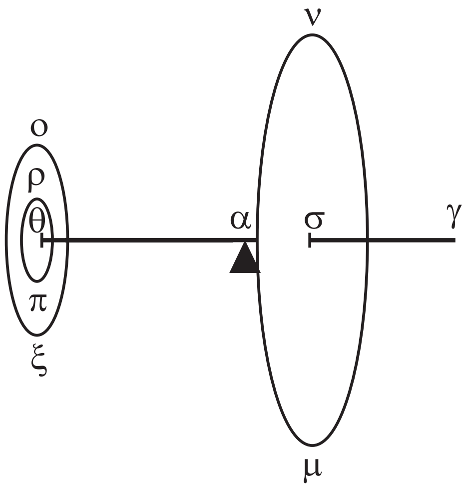


Figura 4.10: La leva orizzontale $\theta\gamma$ rimane in equilibrio sul fulcro α quando il cerchio $\mu\nu$ è sospeso nel punto σ, mentre i cerchi $o\xi$ e $\rho\pi$ sono sospesi simultaneamente nel punto θ.

Dunque il cerchio $\mu\nu$ (sezione del cilindro $\eta\zeta\varepsilon\lambda$) rimanendo dove si trova con il centro nel punto σ, rimane in equilibrio sulla leva con fulcro in α, quando il cerchio $o\xi$ (sezione della sfera) insieme al cerchio $\rho\pi$ (sezione del cono maggiore $\alpha\zeta\varepsilon$) sono sospesi simultaneamente con i loro baricentri nell'estremità θ della leva.

[16][Euc56, Proposizione 2, Libro XII, traduzione degli autori].

La figura 4.11 rappresenta lo stesso equilibrio della figura 4.10 ma considerando i due cerchi dell'estremità θ appesi con filo senza peso. Anche in questa configurazione la leva rimane in equilibrio senza muoversi sul fulcro α.

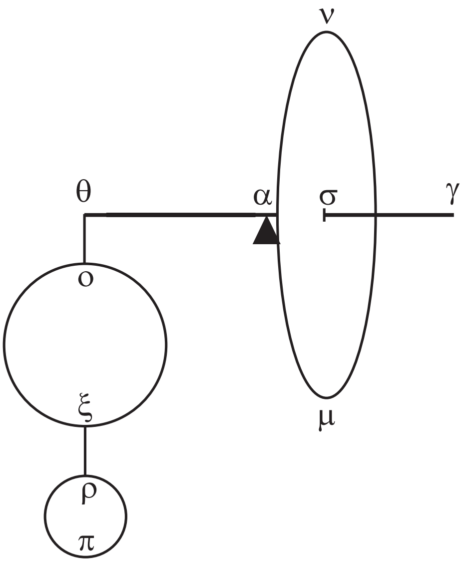


Figura 4.11: La leva orizzontale $\theta\gamma$ rimane in equilibrio sul fulcro α con il cerchio $\mu\nu$ sospeso per il punto σ, mentre i cerchi $o\xi$ e $\rho\pi$ sono sospesi con fili senza peso nel punto θ.

Lo stesso equilibrio si trova per le tre sezioni circolari corrispondenti che sono ottenute con qualunque piano perpendicolare al segmento $\alpha\gamma$ e passante per ogni altra retta parallela al segmento $\mu\nu$ nel parallelogrammo $\eta\varepsilon$ della figura 4.8.

A questo punto, come nel teorema anteriore, Archimede considera che i tre cerchi ottenuti sezionando con i piani perpendicolari al segmento $\alpha\gamma$ il cilindro maggiore $\eta\zeta\varepsilon\lambda$, la sfera $\alpha\beta\gamma\delta$ ed il cono maggiore $\alpha\zeta\varepsilon$, "riempiano" i tre solidi rispettivamente. Dunque il cilindro maggiore, appoggiato in modo uniforme lungo l'asta della leva con fulcro in α, rimarrà in equilibrio con la sfera ed il cono maggiore appoggiati sulla leva con i loro baricentri verticalmente sotto il punto θ. Questa configurazione è rappresentata nella figura 4.12 con la sfera ed il cono maggiore sospesi nel punto θ con fili senza peso.

Uno dei lemmi di questo trattato, citato nella Sezione 4.1, afferma che il punto κ, che divide il segmento $\alpha\gamma$ in due parti uguali, è il centro di gravità del cilindro. Dunque, secondo il sesto postulato del trattato di Archimede *Sull'Equilibrio dei Piani*, citato nella Sezione 2.1.3, anche il cilindro può essere sospeso appena nel punto κ con un filo senza peso, e l'equilibrio della leva non sarà modificato. Questa nuova situazione di equilibrio è rappresentata nella figura 4.13.

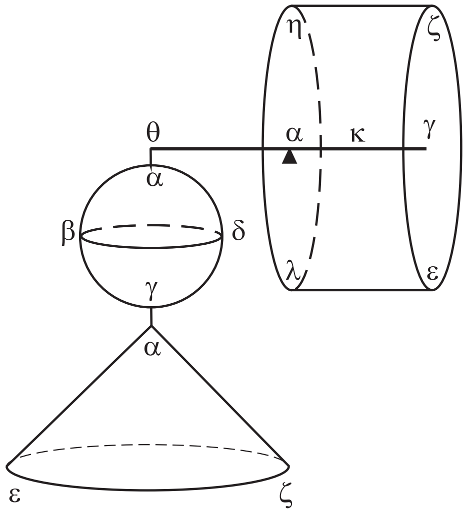


Figura 4.12: La leva orizzontale $\theta\gamma$ rimane in equilibrio sul fulcro α con la sfera $\alpha\beta\gamma\delta$ e il cono maggiore $\alpha\zeta\varepsilon$ sospesi nel punto θ con fili senza peso, mentre l'asse del cilindro maggiore $\eta\zeta\varepsilon\lambda$ rimane appoggiato in modo uniformemente distribuito sul braccio $\alpha\gamma$ della leva.

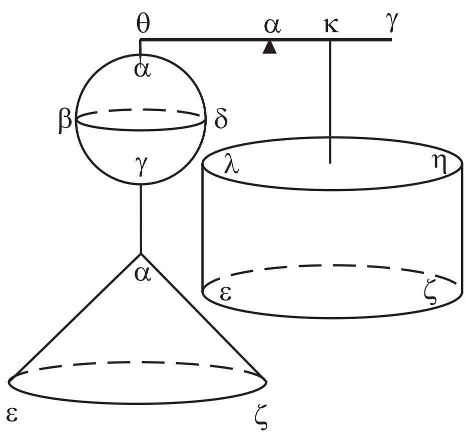


Figura 4.13: La leva della figura 4.12 rimane in equilibrio sul fulcro α con la sfera ed il cono maggiore sospesi nel punto θ con fili senza peso, mentre il cilindro maggiore è sospeso con un filo senza peso solo nel punto κ della leva; il punto κ divide il segmento $\alpha\gamma$ in due parti uguali.

Allora secondo la legge della leva, equazione (2.1), e considerando proporzionalità tra pesi e volumi, l'equilibrio della leva rappresentata nella figura 4.13, si può esprimere matematicamente nel seguente modo:

$$\frac{\text{Cilindro maggiore}_{\eta\zeta\varepsilon\lambda}}{\text{Sfera}_{\alpha\beta\gamma\delta} \ + \ \text{Cono maggiore}_{\alpha\zeta\varepsilon}} = \frac{\theta\alpha}{\alpha\kappa} = \frac{2}{1} \ . \tag{4.10}$$

Ricordiamo ora la Proposizione 10 del libro XII degli *Elementi* di Euclide, secondo la quale:[17]

> Qualunque cono è la terza parte di un cilindro avente la stessa base e la stessa altezza.

Allora sappiamo che, nella figura 4.13, il volume del cono $\alpha\zeta\varepsilon$ è un terzo del volume del cilindro maggiore $\eta\zeta\varepsilon\lambda$:

$$\text{Cono maggiore}_{\alpha\zeta\varepsilon} = \frac{1}{3}(\text{Cilindro maggiore}_{\eta\zeta\varepsilon\lambda}) \ . \tag{4.11}$$

Con le equazioni (4.10) e (4.11) otteniamo il seguente risultato:

$$2(\text{Sfera}_{\alpha\beta\gamma\delta}) = \text{Cono maggiore}_{\alpha\zeta\varepsilon} \ . \tag{4.12}$$

Siccome il cono maggiore $\alpha\zeta\varepsilon$ ha il doppio dell'altezza del cono minore $\alpha\beta\delta$ e il diametro della sua base è il doppio del diametro del cono minore $\alpha\beta\delta$, si ottiene:

$$\text{Cono maggiore}_{\alpha\zeta\varepsilon} = 8(\text{Cono minore}_{\alpha\beta\delta}) \ . \tag{4.13}$$

Dunque le equazioni (4.12) e (4.13) ci mostrano la prima parte di questo teorema:

$$\text{Sfera}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4(\text{Cono minore}_{\alpha\beta\delta}) \ . \tag{4.14}$$

Ossia, secondo Archimede:[18]

> [...] qualunque sfera è il quadruplo del cono avente la base uguale al cerchio massimo della sfera e altezza uguale al raggio della sfera [...]

Ma Archimede continua la sua dimostrazione per provare la seconda parte del teorema. Partendo dalla figura 4.7 si ottiene il seguente risultato:

$$\text{Cono minore}_{\alpha\beta\delta} = \frac{1}{3}(\text{Cilindro minore}_{\psi\beta\delta\varphi}) = \frac{1}{6}(\text{Cilindro minore}_{\psi\omega\chi\varphi}) \ . \tag{4.15}$$

Allora con le equazioni (4.14) e (4.15) abbiamo dimostrato anche la seconda parte del teorema:

$$\text{Cilindro minore}_{\psi\omega\chi\varphi} = \frac{3}{2}(\text{Sfera}_{\alpha\beta\gamma\delta}) \ . \tag{4.16}$$

Come nelle parole di Archimede:[19]

[17] [Euc56, Proposizione 10, Libro XII, traduzione degli autori].
[18] [Mug71b, Vol. III, p. 88, traduzione degli autori].
[19] [Mug71b, Vol. III, p. 88, traduzione degli autori].

[...] il cilindro avente la base uguale al cerchio massimo della sfera e altezza uguale al diametro della sfera è una volta e mezza la sfera [...]

4.3.1 Importanza del Teorema II

Questo teorema ci permette di sottolineare qualche punto:

- Per la prima volta nella storia della matematica è stato trovato il volume di una sfera, che, come abbiamo già visto nel Capitolo 3, oggi rappresentiamo con la formula:

$$V_S = \frac{4}{3}\pi r^3 \ . \tag{4.17}$$

- Il risultato di questo teorema era già stato dimostrato da Archimede nel trattato *Sulla Sfera e il Cilindro* con una dimostrazione geometrica.[20] Solamente con la scoperta del *Metodo* Archimede ci rivelò il modo in cui riuscì a trovare inizialmente questo risultato. Usando la proporzione tra due distanze e due aree, determinata geometricamente, e associando le aree ai pesi corrispondenti, Archimede considera questa proporzione come quella di una leva in equilibrio e a partire da questa, egli continua la sua deduzione applicando i principi meccanici della legge della leva. Allora può concludere che la leva della figura 4.13 rimane in equilibrio appoggiata sul fulcro α finché si rispetta la seguente relazione:

$$\alpha\kappa = \frac{\theta\alpha}{2} \ . \tag{4.18}$$

- Ma fino dai tempi di Democrito si sapeva che il volume di un cono è la terza parte del volume di un cilindro con la stessa base e la stessa altezza. Questo risultato è stato provato rigorosamente per la prima volta da Eudosso e lo troviamo anche negli *Elementi* di Euclide.[21] Combinando questo risultato con la legge della leva e la configurazione di equilibrio rappresentata nella figura 4.13, Archimede riesce a relazionare il volume della sfera con il volume del cono. Analogamente trova la relazione tra il volume della sfera ed il volume del cilindro circoscritto.

  Solo dopo aver trovato il volume della sfera per mezzo della meccanica, Archimede ottenne la prova geometrica di questo teorema senza usare la legge della leva.

- Anche se oggi pochi lo ricordano, fu Archimede a trovare per primo l'area della superficie della sfera, che rappresentiamo modernamente con la formula già vista nel Capitolo 3:

[20] [Arc02b, Proposizione 34, pp. 41-44], [Ass08, pp. 19-21] e [Ass10, pp. 24 e 29].
[21] [Euc56, Volume XII, Proposizione 10].

$$A_S = 4\pi r^2 \ . \tag{4.19}$$

Ossia:

> La superficie di qualunque sfera è quattro volte il suo cerchio massimo.

Questo risultato è dimostrato da Archimede nel trattato *Sulla Sfera e il Cilindro* come il Teorema 33, mentre il volume della sfera è dimostrato nel Teorema 34. Per questo le interpretazioni delle opere di Archimede, prima della scoperta del Metodo, consideravano che l'area della sfera fosse stata trovata per prima ed il volume dopo. Dopo il ritrovamento del *Metodo* nel 1906, la sequenza euristica è stata chiarita dallo stesso Archimede che scrisse, nell'interpretazione di E. Rufini:[22]

> Conosciuta questa proposizione, cioè che ogni sfera è quattro volte maggiore del cono che ha per base il circolo massimo e l'altezza uguale al raggio della sfera, mi venne in mente che la superficie di ogni sfera fosse quattro volte maggiore di quella di un circolo massimo della sfera; e precisamente, come ogni circolo è uguale ad un triangolo che ha per base la circonferenza del circolo e l'altezza uguale al raggio del circolo, cosí supposi che ogni sfera fosse uguale ad un cono avente per base la superficie della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera.

Possiamo illustrare il procedimento per ottenere l'area della sfera, per mezzo della figura 4.14. Nella parte (a) è rappresentato un cerchio con triangoli inscritti. Nella parte (b) è rappresentata una sfera con piramidi inscritte, i cui vertici coincidono con il centro della sfera. Per semplificare il disegno, si mostrano solo tre piramidi, ma il lettore deve immaginare che la sfera sia completamente riempita da queste piramidi con i vertici al centro della sfera.

Quando si diminuiscono le basi dei triangoli inscritti, aumentando di conseguenza il numero di triangoli, l'area della somma di tutti i triangoli, diventerà sempre più prossima all'area del cerchio. Aumentando infinitamente il numero dei triangoli, l'area del cerchio sarà uguale alla somma delle aree di tutti gli infiniti triangoli. Possiamo allora concludere che l'area del cerchio è uguale all'area di un unico triangolo avente come base la lunghezza della circonferenza e come altezza il raggio del cerchio, come è stato rappresentato nella figura 3.3.

Allo stesso modo, diminuendo le basi delle piramidi inscritte nella sfera della figura 4.14 (b), aumentando di conseguenza il numero delle stesse, il volume della somma di tutte le piramidi, sarà sempre più prossimo al volume della sfera. Aumentando infinitamente il numero delle piramidi, il volume della sfera sarà uguale alla somma dei volumi di tutte le infinite piramidi, aventi allora come somma delle basi la superficie della sfera. Concludiamo dunque che il volume della sfera è uguale al volume di un unico cono, avente per base la superficie

[22] [Ruf61, p. 117].

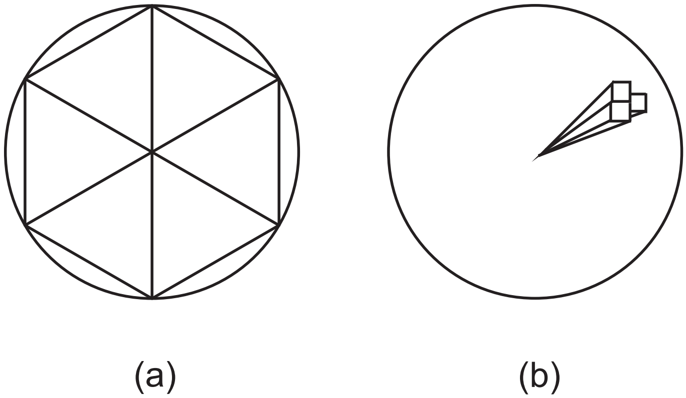


Figura 4.14: (a) Un cerchio con i triangoli inscritti. (b) Una sfera con piramidi inscritte, i cui vertici sono nel centro della sfera.

della sfera e altezza uguale al raggio della sfera, come rappresentato nella figura 4.15.

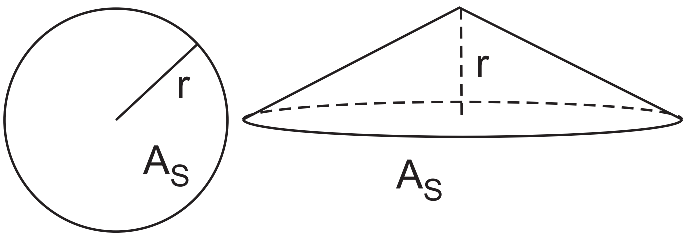


Figura 4.15: Il volume della sfera di raggio r e area A_S è uguale al volume del cono maggiore di base A_S e altezza r.

L'uguaglianza rappresentata nella figura 4.15 si può esprimere matematicamente come:

$$V_S = V_{Cono\ maggiore}\ . \tag{4.20}$$

Ma nel secondo teorema del *Metodo*, Archimede ha dimostrato che il volume di qualunque sfera è il quadruplo del volume del volume del cono avente per base il cerchio massimo della sfera e altezza uguale al raggio. Dunque possiamo scrivere questa uguaglianza, rappresentata nella figura 3.4, con la seguente equazione:

$$V_S = 4V_{Cono\ minore}\ . \tag{4.21}$$

Allora:

$$V_{Cono\ maggiore} = 4V_{Cono\ minore}\ . \tag{4.22}$$

Ricordando che i due coni dell'equazione (4.22) hanno la stessa altezza (il raggio della sfera), e che l'area della base del cono maggiore è l'area A_S della sfera, mentre l'area della base del cono minore è il cerchio massimo della sfera, secondo l'equazione (3.8), concludiamo che:

$$A_S = 4A_{\text{Cerchio massimo}} = 4\left(\pi r^2\right) \ . \tag{4.23}$$

Ossia, la superficie di qualunque sfera è quattro volte il suo cerchio massimo.

- Questo teorema che correlaziona il volume della sfera con il volume del cilindro circoscritto fu considerato dallo stesso Archimede come una delle sue più importanti scoperte, infatti sembra che egli abbia chiesto fosse messa sulla sua tomba "la figura di una sfera con un cilindro".

Questa curiosità sul sepolcro di Archimede ci è stata tramandata da Cicerone che, quando fu questore in Sicilia nel 75 a.C., ritrovò la tomba di Archimede abbandonata dai suoi concittadini e la fece restaurare:[23]

> [...] dalla stessa città (Siracusa) risveglierò dalla polvere [...] un piccolo uomo umile che visse molti anni dopo, Archimede. Quando ero questore scopersi il suo sepolcro, tutto circondato e rivestito di rovi e di pruni, di cui i Siracusani ignoravano l'esistenza, anzi escludevano che ci fosse. Ricordavo alcuni versi di poco conto, che sapevo trovarsi iscritti sulla sua tomba: dicevano che sulla sommità del sepolcro era posta una sfera con un cilindro. Un giorno scrutavo ogni angolo con lo sguardo (fuori della parta sacra a Ciane c'è un gran numero di sepolcri) e scorsi una colonnetta che non sporgeva molto dai cespugli, su cui stava l'effigie di una sfera e di un cilindro. Subito dissi ai Siracusani (si trovavano con me i più ragguardevoli cittadini) che pensavo si trattasse proprio di ciò che cercavo. Si mandò molta gente con falci e il luogo fu ripulito e sgombrato. Quando fu aperto l'accesso, ci avvicinammo al lato frontale del piedestallo: si vedeva un'iscrizione quasi dimezzata, in cui i versi erano corrosi verso la fine di ciascuno. Così una delle più celebri città della Magna Grecia, e una volta anche fra le più dotte, avrebbe ignorato l'esistenza della tomba del suo più geniale cittadino se non gliela avesse fatta conoscere un uomo di Arpino (*Discussioni Tusculane* 5, 64-66, trad. di N. Marinone, Utet, Torino 1976).

[23] [Gey06, p. 95].

4.4 Dimostrazione Fisica del Teorema V: Centro di Gravità di un Segmento di Paraboloide di Rotazione

In questo teorema Archimede mostra come usare il suo metodo per trovare il baricentro di un solido:[24]

> Il centro di gravità di un segmento di paraboloide di rotazione (che Archimede chiama conoide rettangolo) sezionato da un piano perpendicolare all'asse, si trova sulla retta che è asse del segmento, e la divide in modo che la parte prossima al vertice è il doppio della parte restante.

Nella figura 4.16 rappresentiamo gli elementi necessari alla dimostrazione del teorema. Abbiamo un paraboloide di rotazione $\alpha\beta\gamma$ e un cono $\alpha\beta\gamma$.

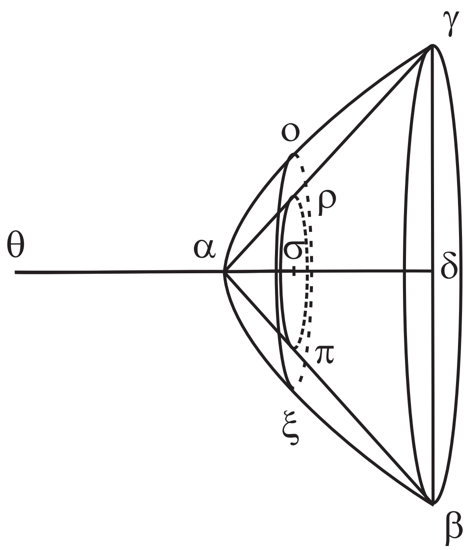


Figura 4.16: Prospettiva del paraboloide, del cono e delle loro sezioni.

La figura 4.17 rappresenta una vista laterale di figura 4.16 con i solidi descritti e le loro sezioni.

Un paraboloide di rotazione sia sezionato con un piano passante per l'asse $\alpha\delta$ ottenendo la parabola $\alpha\beta\gamma$, come nella figura 4.17. Consideriamo che il paraboloide sia sezionato da un altro piano perpendicolare all'asse $\alpha\delta$ e sia $\beta\gamma$ l'intersezione comune dei due piani. Prolunghiamo l'asse $\alpha\delta$ fino al punto θ, in modo che:

$$\theta\alpha = \alpha\delta \ . \tag{4.24}$$

[24] [Arc02a, p. 25], [Ass08, p. 131], [Ass10, p. 135] e [Mag, pp. 67 e 70].

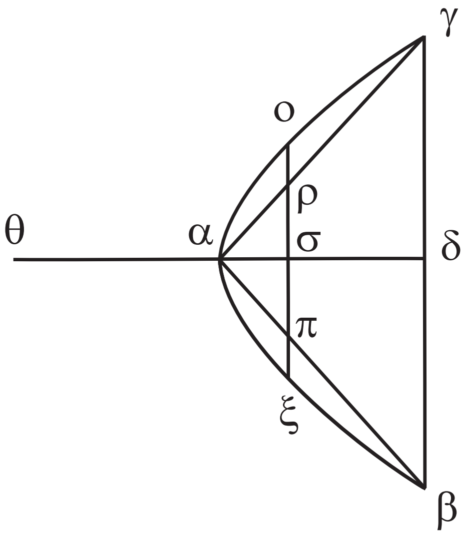


Figura 4.17: Costruzione geometrica del Teorema V con la parabola $\alpha\beta\gamma$ e l'asse $\alpha\delta$.

La base del segmento di paraboloide è il cerchio che ha per diametro la retta $\beta\gamma$. Questo cerchio fa da base anche al cono $\alpha\beta\gamma$ con vertice in α, in modo che i segmenti $\alpha\gamma$ e $\alpha\beta$ siano le generatrici del cono. Tracciamo nella parabola un'ordinata qualunque $o\xi$ che intersechi i segmenti $\alpha\beta$, $\alpha\delta$ e $\alpha\gamma$ nei punti π, σ e ρ, rispettivamente. Tracciando allora un piano passante per $o\xi$ e perpendicolare a $\alpha\delta$, questo nuovo piano intersecherà il paraboloide in un cerchio di diametro $o\xi$ ed il cono in un cerchio di diametro $\rho\pi$, entrambi con centro in σ.

Partendo dalla geometria della figura 4.17 Archimede prova che:[25]

$$\frac{\theta\alpha}{\alpha\sigma} = \frac{\sigma\xi \cdot \sigma\xi}{\sigma\pi \cdot \sigma\pi} \ . \tag{4.25}$$

Ma le aree di due cerchi stanno tra di loro come i quadrati dei loro diametri, perciò possiamo anche scrivere la proporzione (4.25) come:

$$\frac{\theta\alpha}{\alpha\sigma} = \frac{\text{Cerchio di diametro o}\xi}{\text{Cerchio di diametro }\rho\pi} \ . \tag{4.26}$$

La proporzione (4.26) è la relazione chiave usata da Archimede, insieme alla legge della leva per la dimostrazione di questo teorema.

Immaginiamo ora che il segmento $\theta\delta$ rappresenti l'asta di una leva con il fulcro nel punto medio α. Supponiamo che le figure geometriche abbiano pesi distribuiti in modo uniforme e proporzionali alle rispettive aree. Allora le equazioni (2.1) e (4.26) si possono interpretare come la rappresentazione di una leva in equilibrio sul fulcro α. Dunque il cerchio $o\xi$, sezione del paraboloide, sospeso

[25] [Arc02a, pp. 26-27] e [Mag, p. 67].

dove si trova, ossia nel punto σ, rimane in equilibrio sulla leva con il cerchio $\rho\pi$ del cono collocato con il baricentro nel punto θ. Questa configurazione di equilibrio è rappresentata nella figura 4.18.

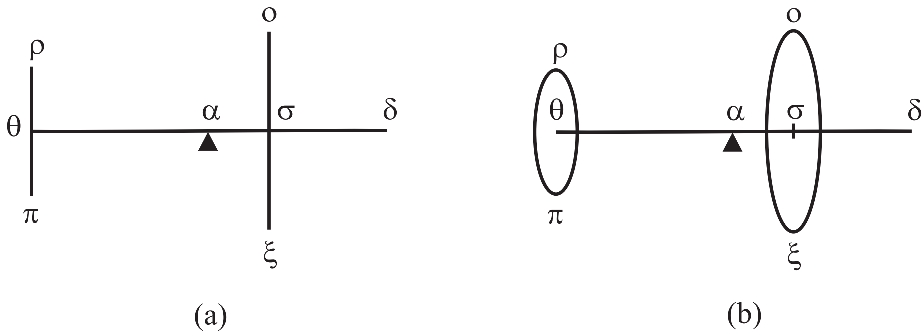


Figura 4.18: I due cerchi in equilibrio sulla leva. (a) Vista laterale. (b) Prospettiva.

Un ragionamento simile si può applicare a qualunque paio di sezioni circolari ottenute con un piano perpendicolare al segmento $\alpha\delta$ e passante per qualunque altra ordinata della parabola. Dunque, considerando allo stesso modo tutte le sezioni circolari che formano il segmento di paraboloide e tutte quelle che formano il cono, concludiamo che il segmento di paraboloide, appoggiato in modo uniformemente distribuito sul braccio della leva, rimarrà in equilibrio sulla leva con fulcro in α, quando tutto il cono sarà appoggiato sulla leva solamente nel punto θ. Rappresentiamo questa configurazione di equilibrio nella figura 4.19.

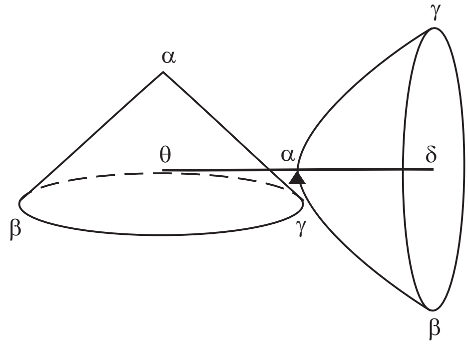


Figura 4.19: Equilibrio della leva sul fulcro α con il segmento di paraboloide distribuito lungo il braccio $\alpha\delta$, mentre il cono si appoggia sulla leva solo con il suo baricentro nel punto θ.

La figura 4.20 rappresenta la stessa configurazione di equilibrio con il cono sospeso all'estremità θ della leva per mezzo di un filo senza peso e con il suo

baricentro verticalmente sotto il punto θ.

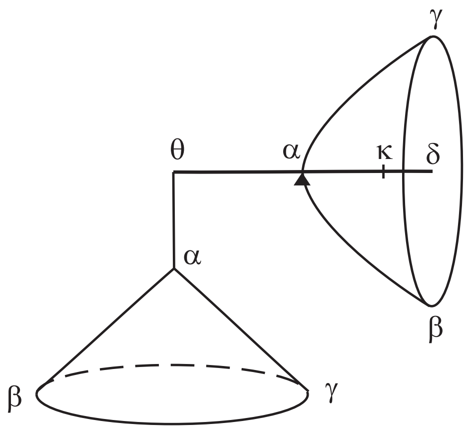


Figura 4.20: Equilibrio della leva con il segmento di paraboloide distribuito lungo il braccio $\alpha\delta$, mentre il cono è sospeso solo nel punto θ.

Considerazioni di simmetria ci indicano che il centro di gravità del segmento di paraboloide deve trovarsi lungo il suo asse di simmetria $\alpha\delta$. Allora chiamiamo κ il baricentro del paraboloide, come indicato nella figura 4.20. Per trovare la posizione del punto κ, Archimede inizia cercando una relazione tra i segmenti $\alpha\kappa$ e $\alpha\delta$. Considerando il sesto postulato del suo trattato *Sull'Equilibrio dei Piani*, citato nella Sezione 2.1.3, l'equilibrio della figura 4.20 non è alterato quando il paraboloide è sospeso sulla leva unicamente nel punto κ. Questa nuova configurazione di equilibrio è rappresentata nella figura 4.21 con il paraboloide appeso con un filo senza peso nel punto κ, e con il suo baricentro verticalmente sotto il punto κ.

Possiamo dunque esprimere matematicamente l'equilibrio della figura 4.21, secondo la legge della leva, con la relazione seguente:

$$\frac{\alpha\kappa}{\alpha\theta} = \frac{\text{Cono}}{\text{Segmento di paraboloide}} \; . \tag{4.27}$$

Nel quarto teorema del Metodo Archimede aveva già dimostrato:[26]

> [...] che qualunque segmento di conoide rettangolo (paraboloide di rotazione) sezionato da un piano perpendicolare all'asse, è una volta e mezza il cono avente base uguale al segmento (di paraboloide) e lo stesso asse [...]

Allora secondo questo teorema abbiamo:

$$\text{Segmento di paraboloide} = \frac{3}{2}(\text{Cono}) \; . \tag{4.28}$$

[26] [Arc02a, p. 24] e [Mag, p. 69].

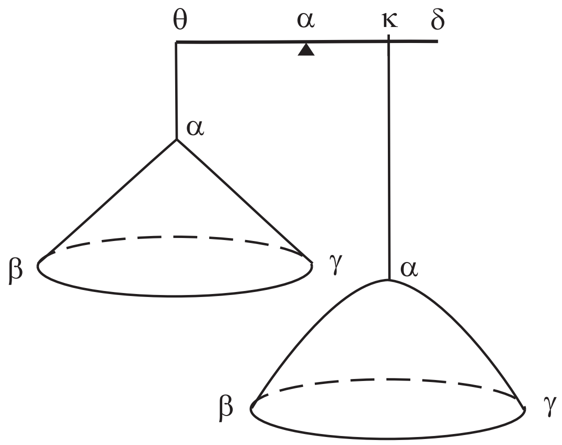


Figura 4.21: Leva in equilibrio sul fulcro α con il cono appeso nel punto θ e il paraboloide appeso nel punto κ.

Dalle equazioni (4.27) e (4.28) e dalla costruzione $\alpha\theta = \alpha\delta$ risulta che:

$$\alpha\kappa = \frac{2}{3}(\alpha\theta) = \frac{2}{3}(\alpha\delta) \ . \tag{4.29}$$

Ma anche:

$$\alpha\kappa + \kappa\delta = \alpha\delta \ . \tag{4.30}$$

Combinando le equazioni (4.29) e (4.30), possiamo concludere che il baricentro di un segmento di paraboloide di rotazione si trova sul suo asse di simmetria $\alpha\delta$ in un punto κ tale che la parte dell'asse adiacente al vertice sia il doppio della parte restante,ossia:

$$\alpha\kappa = 2(\kappa\delta) \ . \tag{4.31}$$

Abbiamo così ottenuto il risultato matematico del Teorema V del *Metodo*, ossia la posizione del baricentro di un paraboloide di rotazione, corrispondente alle parole di Archimede che abbiamo ricordato all'inizio di questa sezione.[27]

4.4.1 Importanza del Teorema V

- Nel Teorema I Archimede há trovato un'area sconosciuta, quella di un segmento di parabola, partendo da tre grandezze a lui note, cioè: l'area del triangolo, la posizione del baricentro del triangolo e una leva in equilibrio con queste due figure appese per i rispettivi baricentri, come abbiamo rappresentato nella figura 4.6. Nel Teorema II Archimede ha ottenuto il volume sconosciuto di un solido, la sfera, usando lo stesso procedimento,

[27] [Arc02a, p. 25], [Ass08, p. 131], [Ass10, p. 135] e [Mag, pp. 67 e 70].

illustrato nella figura 4.13. Conoscendo i volumi del cilindro e del cono, la legge della leva e la relazione tra due distanze, egli riuscì ad ottenere il volume della sfera in funzione del volume del cono e del cilindro circoscritto. Nel Teorema V Archimede ci mostra per la prima volta come usare il metodo meccanico per trovare la posizione del baricentro di un corpo, come abbiamo rappresentato nella configurazione di equilibrio della figura 4.21. In quest'ultimo caso egli conosceva la relazione tra il volume (peso) del cono ed il volume (peso) del paraboloide, ma non conosceva la proporzione tra i due segmenti $\alpha\kappa$ e $\theta\alpha$. Usando la legge della leva gli fu possibile trovare la relazione sconosciuta e con essa il baricentro del paraboloide di rotazione.

- Nella sua opera *Sui Galleggianti* Archimede aveva già indicato la posizione esatta del centro di gravità di un paraboloide di rotazione.[28] In questo trattato egli studiò le varie posizioni di equilibrio di un paraboloide di rotazione fluttuando in un fluido. Ma la prova di come determinare questo baricentro non si trova né in questo trattato, né in nessun'altra opera di Archimede che ci è pervenuta. Solo con la scoperta del *Metodo* fu possibile conoscere il procedimento usato dal matematico siracusano per trovarlo.

- Come abbiamo già visto in questo libro, nel suo trattato *Metodo sui Teoremi Meccanici* Archimede ha citato e usato più volte la posizione del baricentro di un cono, senza tuttavia tramandarci, nelle opere oggi esistenti, la dimostrazione di come trovarla. Gli autori di questo libro hanno voluto seguire il metodo di Archimede per trovarla. La dimostrazione, già pubblicata precedentemente,[29] si trova riassunta nell' Appendice.

[28] [Arc02b, p. 265], [Dij87, pp. 380 e 384], [Ass96], [Ass08, pp. 26-28 e 131] e [Ass10, pp. 30-32 e 135].

[29] [MA12].

Capitolo 5

Conclusione

Da quanto abbiamo visto, possiamo ora riassumere l'essenza del Metodo di Archimede per trovare l'area, il volume oppure il baricentro di una figura geometrica di cui non si conosca una di queste proprietà, partendo da una o più figure conosciute:

1. Usando come base le figure geometriche considerate, si cerca una proporzione in cui uno dei rapporti sia tra due distanze, mentre il secondo rapporto può essere tra due distanze, come nell'equazione (4.2) oppure tra due aree, come nelle equazioni (4.8) e (4.25).

2. Si considera che le figure geometriche abbiano un peso distribuito uniformemente. In particolare si suppone che il peso di una figura lineare sia proporzionale alla sua lunghezza, il peso di una figura piana sia proporzionale alla sua area, mentre il peso di una figura solida sia proporzionale al suo volume.

3. Si appendono queste figure sui bracci opposti di una leva, in modo che rimangano in equilibrio, secondo l'equazione della leva (2.1). Le varie configurazioni di equilibrio studiate in questo libro sono rappresentate nelle figure 4.4, 4.10 e 4.18.

4. Si considera che ogni figura bidimensionale sia costituita da tutti i segmenti retti, paralleli tra di loro, in essa contenuti. Allo stesso modo si considera che ogni figura tridimensionale sia costituita da tutti i piani in essa contenuti, paralleli fra di loro ed ortogonali ad un certo asse.

5. Si ottiene allora una leva in equilibrio con uno o più corpi appesi per i loro baricentri su di uno dei due bracci della leva, mentre un altro corpo rimane con il suo peso distribuito lungo l'altro braccio della leva. Queste configurazioni di equilibrio sono rappresentate nelle figure 4.5, 4.12 e 4.20.

6. A questo punto si percepisce l'importanza dell'uso del sesto postulato presentato da Archimede nel trattato *Sull'Equilibrio dei Piani*, già citato nella

Sezione 2.1.3. Secondo questo postulato è possibile sostituire un corpo con il peso distribuito lungo uno dei bracci di una leva in equilibrio, con un altro corpo uguale al primo e con lo stesso peso, sospeso nella leva appena per un punto, ossia per il suo baricentro. Questo sesto postulato ci garantisce che la leva rimarrà in equilibrio, non ostante la sostituzione.

7. Usando la legge della leva, equazione (2.1), si può allora trovare la grandezza sconosciuta di una figura appesa ad una leva in equilibrio, quando si conoscono le grandezze delle altre figure appese alla leva. Come abbiamo visto, la grandezza sconosciuta può essere l'area, il volume o il baricentro di una figura.

Infine, nessuna conclusione può essere migliore dell'opinione dello stesso Archimede sul suo *Metodo*:[1]

> [...] alcune cose si manifestarono prima per via meccanica, e poi le dimostrai geometricamente; perché la ricerca fatta con questo metodo non importa una vera dimostrazione. Però è certamente più facile, dopo avere con tal metodo acquistato una certa cognizione delle questioni, trovarne la dimostrazione, anziché cercarla senza averne alcuna cognizione preliminare.

[1] [Ruf61, p. 103].

Appendice A

Determinazione del Baricentro di un Cono Secondo il *Metodo* di Archimede

A.1 Premesse

All'inizio della sua lettera ad Eratostene contenente i teoremi risolti con il metodo meccanico, Archimede ha citato vari lemmi necessari alle dimostrazioni contenute nel trattato. Molti di questi lemmi erano già stati dimostrati da altri matematici, alcuni furono dimostrati da Archimede stesso ma di uno in particolare non ci è pervenuta nessuna dimostrazione dai tempi antichi: il baricentro di un cono. Come abbiamo visto all'inizio del Capitolo IV, Archimede dice che:

> Il centro di gravità di qualunque cono è sull'asse e lo divide in modo che la parte prossima al vertice è il triplo della parte restante.

Non si trova una dimostrazione di questo lemma nemmeno nei trattati di Archimede che ci sono pervenuti. Knorr ne delineò una prova seguendo il ragionamento geometrico di Archimede.[1] Ci è sembrato utile a questo punto cercarne la dimostrazione usando il metodo meccanico insegnato da Archimede.

A.2 Parte Geometrica

Possiamo iniziare la dimostrazione ricordando che nel Teorema II del *Metodo* Archimede provò che qualunque sfera è il quadruplo del cono avente la base uguale al cerchio massimo della sfera e altezza uguale al raggio della sfera.

[1] [Kno79].

Allora per trovare le proporzioni matematiche necessarie alla dimostrazione, cominciamo a costruire una sfera con un cono inscritto secondo la descrizione del paragrafo precedente, ossia, la base del cono è il circolo massimo della sfera e la sua altezza è il raggio della sfera, come nella figure A.1 e A.2.

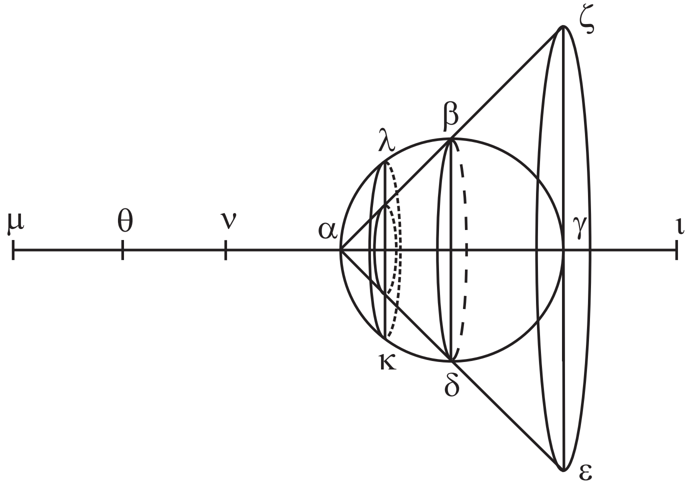


Figura A.1: Una sfera con un cono $\alpha\beta\delta$ inscritto.

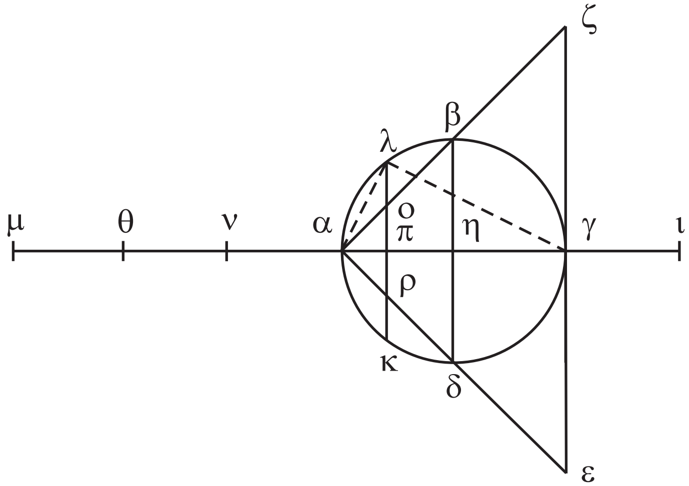


Figura A.2: Vista laterale di Figura A.1.

Sia dunque $\alpha\beta\gamma\delta$ il circolo massimo della sfera e $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$ due diametri perpendicolari tra di loro, intersecandosi nel punto η, centro della sfera. Consideriamo il cono $\alpha\beta\delta$ con vertice in α, la cui base sia il cerchio massimo nel piano passante per $\beta\delta$ ad angolo retto con $\alpha\gamma$. Prolunghiamo la superficie laterale di questo

cono fino a intersecare il piano passante per γ ad angolo retto con $\alpha\gamma$; sia il cerchio di diametro $\zeta\varepsilon$ la base di questo cono maggiore. Consideriamo ancora un piano qualunque $\kappa\lambda$ facente angolo retto con il segmento $\alpha\gamma$, intersecando quest'ultimo nel punto π. Il piano $\kappa\lambda$ interseca inoltre il cono e la sfera formando cerchi i cui diametri sono rispettivamente $o\rho$ e $\kappa\lambda$. Prolunghiamo ora il segmento $\alpha\gamma$ verso sinistra passando per i punti ν e θ fino a μ; lo prolunghiamo ancora verso destra fino al punto ι, di modo che $\mu\theta = \theta\nu = \nu\alpha = \alpha\eta = \eta\gamma = \gamma\iota$. Ossia, tutti questi segmenti sono uguali al raggio della sfera. Tracciamo inoltre i segmenti $\alpha\lambda$ e $\lambda\gamma$ ottenendo così il triangolo rettangolo $\alpha\lambda\gamma$.

Iniziamo l'applicazione del metodo di Archimede ricercando una correlazione matematica tra gli elementi rappresentati nella figura A.2. Per similitudine dei triangoli $\alpha\lambda\gamma$ e $\alpha\lambda\pi$ otteniamo:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\lambda} = \frac{\alpha\lambda}{\alpha\pi} \ . \tag{A.1}$$

Ossia:

$$\alpha\gamma = \alpha\lambda \cdot \frac{\alpha\lambda}{\alpha\pi} \ . \tag{A.2}$$

Dividendo i due membri per $\alpha\pi$:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\pi} = \frac{\alpha\lambda \cdot \alpha\lambda}{\alpha\pi \cdot \alpha\pi} \ . \tag{A.3}$$

Rappresentiamo con $\alpha\lambda \cdot \alpha\lambda$ il quadrato di lato $\alpha\lambda$; analogamente per $\alpha\pi$ e $\lambda\pi$. Applicando allora il teorema di Pitagora al triangolo $\alpha\lambda\pi$ della figura A.2 otteniamo:

$$\alpha\lambda \cdot \alpha\lambda = \alpha\pi \cdot \alpha\pi + \lambda\pi \cdot \lambda\pi \ . \tag{A.4}$$

Sostituendo l'equazione (A.4) nella (A.3), risulta:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\pi} = \frac{\alpha\pi \cdot \alpha\pi + \lambda\pi \cdot \lambda\pi}{\alpha\pi \cdot \alpha\pi} \ . \tag{A.5}$$

Per costruzione nella figura A.2 sappiamo che $\alpha\gamma = \alpha\theta$. Il triangolo $\alpha o\pi$ è isoscele, per cui $\alpha\pi = o\pi$. Sostituendo queste relazioni nei due membri dell'equazione (A.5), rispettivamente, otteniamo:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\pi} = \frac{o\pi \cdot o\pi + \lambda\pi \cdot \lambda\pi}{o\pi \cdot o\pi} \ . \tag{A.6}$$

Ma sapendo che l'area del cerchio è proporzionale al quadrato del suo raggio, ossia del suo diametro, possiamo allora scrivere l'equazione sopra scritta come:

$$\frac{\alpha\theta}{\alpha\pi} = \frac{(\text{area del cerchio di diametro } o\rho) + (\text{area del cerchio di diametro } \kappa\lambda)}{\text{area del cerchio di diametro } o\rho} \ . \tag{A.7}$$

Questa è la proporzione matematica necessaria alla applicazione della parte fisica del *Metodo* di Archimede.

A.3 Parte Fisica

Consideriamo allora che $\mu\iota$ sia una leva con fulcro nel punto α. Supponiamo che le figure geometriche abbiano pesi distribuiti in modo uniforme, ossia, i loro pesi siano proporzionali alle rispettive aree. A questo punto ricordiamo che a una leva in posizione di equilibrio si applica l'equazione (2.1), in tutto simile all'equazione (A.7). Dunque sappiamo che i cerchi $\kappa\lambda$ e $o\rho$, rimanendo dove sono con i loro centri nel punto π, faranno equilibrio al cerchio $o\rho$ trasportato con il suo centro nel punto θ.

Rappresentiamo questa situazione di equilibrio nella figura A.3, mentre nella figura A.4 troviamo lo stesso equilibrio con i cerchi sospesi per mezzi di fili senza peso con i loro baricentri verticalmente al di sotto dei loro punti di sospensione.

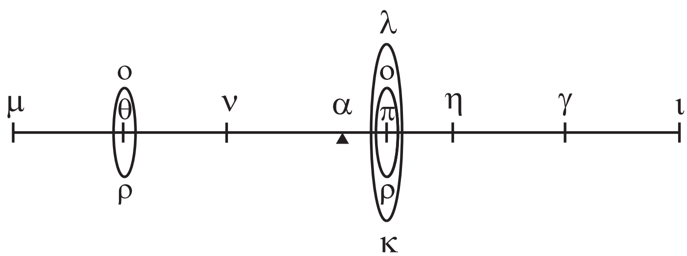


Figura A.3: La leva in equilibrio. I cerchi sospesi sulla leva per i loro baricentri.

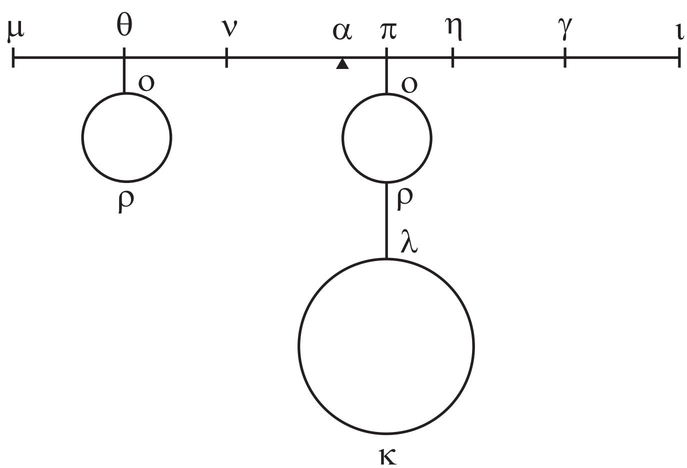


Figura A.4: La leva in equilibrio. I cerchi sospesi con fili senza peso.

Questo equilibrio vale qualunque sia la posizione del piano variabile $\kappa\lambda$ tra α e γ. Considerando l'insieme di tutti i piani, mentre il segmento $\alpha\pi$ varia tra zero e $\alpha\gamma$, tutti i cerchi $\kappa\lambda$ riempiono la sfera $\alpha\beta\gamma\delta$, e tutti i cerchi $o\rho$ riempiono il cono $\alpha\zeta\varepsilon$, figura A.5.

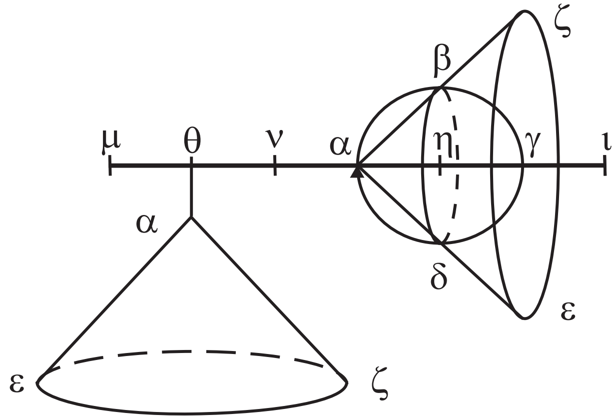


Figura A.5: Un cono sospeso nel punto θ, mentre la sfera e un altro cono sono appoggiati in modo uniforme lungo l'altro braccio della leva.

Di conseguenza, secondo l'equazione (A.7) ci sarà equilibrio anche tra la sfera $\alpha\beta\gamma\delta$ ed il cono $\alpha\zeta\varepsilon$, distribuiti lungo uno dei bracci della leva e rimanendo dove sono, mentre sull'altro braccio della leva si trova un altro cono $\alpha\zeta\varepsilon$, appoggiato solo nel punto θ. Quest'ultimo equilibrio è rappresentato nella figura A.5 con il secondo cono $\alpha\zeta\varepsilon$ sospeso con un filo senza peso nel punto θ in modo che il suo baricentro si trovi verticalmente sotto il punto θ.

Secondo il sesto postulato del trattato *Sull'Equilibrio dei Piani*, già citato nel Capitolo 2, l'equilibrio persiste anche nel caso in cui la sfera sia sospesa solo per il suo baricentro, ossia, il suo centro η, come nella figura A.6.

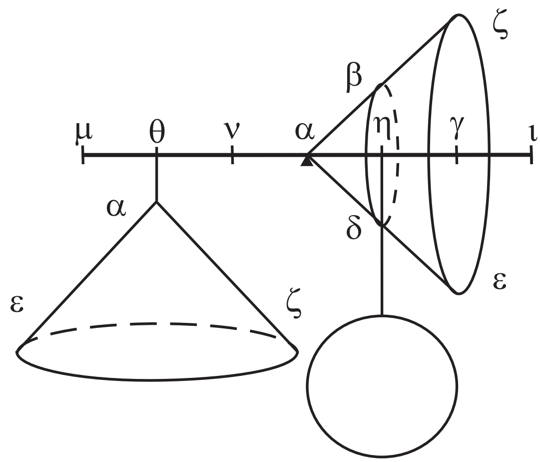


Figura A.6: La sfera della figura A.5 si trova adesso appesa alla leva nel punto η con un filo senza peso.

Nel secondo teorema del *Metodo sui Teoremi Meccanici*, Archimede aveva già provato che la sfera $\alpha\beta\gamma\delta$ della figura A.2 è quattro volte il cono $\alpha\beta\delta$, ossia:

$$\text{Sfera } \alpha\beta\gamma\delta = 4(\text{Cono } \alpha\beta\delta) \ . \tag{A.8}$$

Ma il cono $\alpha\zeta\varepsilon$ è otto volte il cono $\alpha\beta\delta$ perché l'altezza di $\alpha\zeta\varepsilon$ è il doppio di quella di $\alpha\beta\delta$ e il diametro $\zeta\varepsilon$ è il doppio del diametro $\beta\delta$, perciò:

$$\text{Cono } \alpha\zeta\varepsilon = 8(\text{Cono } \alpha\beta\delta) \ . \tag{A.9}$$

Allora la leva rappresentata nella figura A.6 rimarrà in equilibrio anche sostituendo la sfera $\alpha\beta\gamma\delta$ con quattro coni $\alpha\beta\delta$ ed il cono $\alpha\zeta\varepsilon$, sospeso in θ, con otto coni $\alpha\beta\delta$, come possiamo vedere nella figura A.7.

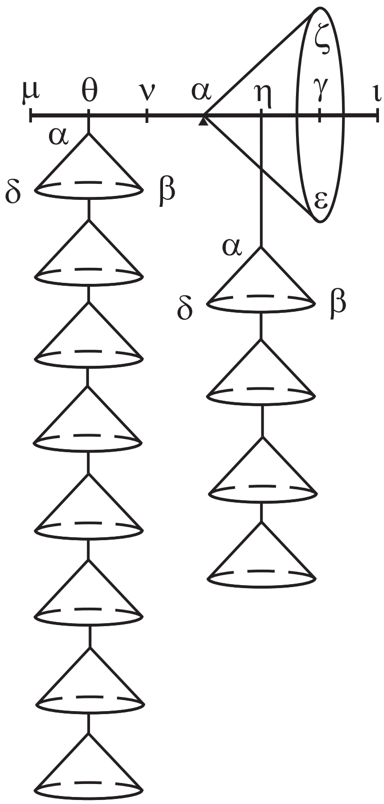


Figura A.7: La sfera (della figura A.5) è sostituita con quattro coni $\alpha\beta\delta$, mentre il cono sospeso in θ è sostituito con otto coni $\alpha\beta\delta$.

Nella quarta proposizione del trattato *Sull'Equilibrio dei Piani*, Archimede ha provato che:[2]

[2][Mug71a, Vol. II, p. 82, traduzione degli autori].

> Se due grandezze uguali non hanno lo stesso baricentro, il centro di gravità della grandezza composta dalle due grandezze (uguali), sarà il punto di mezzo della retta che unisce i baricentri delle grandezze.

Per questo possiamo sostituire nella figura A.7 gli otto coni $\alpha\beta\delta$ sospesi in θ con quattro coni $\alpha\beta\delta$ sospesi nel punto μ insieme con quattro coni $\alpha\beta\delta$ sospesi nel punto ν, senza tuttavia alterare l'equilibrio della leva; come vediamo nella figura A.8.

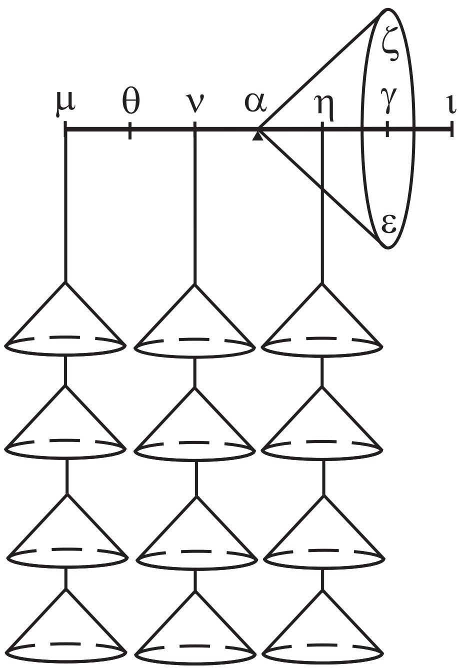


Figura A.8: Gli otto coni sospesi in θ nella figura A.7 sono sostituiti da quattro coni sospesi in μ insieme con quattro coni sospesi in ν.

Ma essendo $\alpha\nu = \alpha\eta$, possiamo anche ritirare simultaneamente i quattro coni $\alpha\beta\delta$ appesi nel punto ν e i quattro coni $\alpha\beta\delta$ appesi nel punto η, senza alterare l'equilibrio, come nella figura A.9.

Usando nuovamente il sesto postulato del trattato *Sull'Equilibrio dei Piani*, l'equilibrio della leva nella figura A.9 non sarà alterato sostituendo il cono $\alpha\zeta\varepsilon$ distribuito uniformemente sul braccio della leva, con un altro cono $\alpha\zeta\varepsilon$ avente lo stesso peso, nel punto ξ corrispondente al suo baricentro. Ricordiamo che il nostro obbiettivo è determinare la distanza $\alpha\xi$. Questo ultimo equilibrio è rappresentato nella figura A.10, con il cono $\alpha\zeta\varepsilon$ appeso nel punto ξ con un filo senza peso.

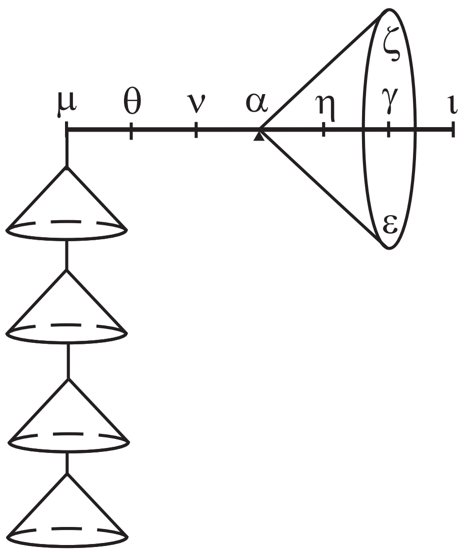


Figura A.9: L'equilibrio della leva nella figura A.8 non è alterato ritirando simultaneamente i quattro coni $\alpha\beta\delta$ appesi nel punto ν e i quattro coni $\alpha\beta\delta$ appesi nel punto η.

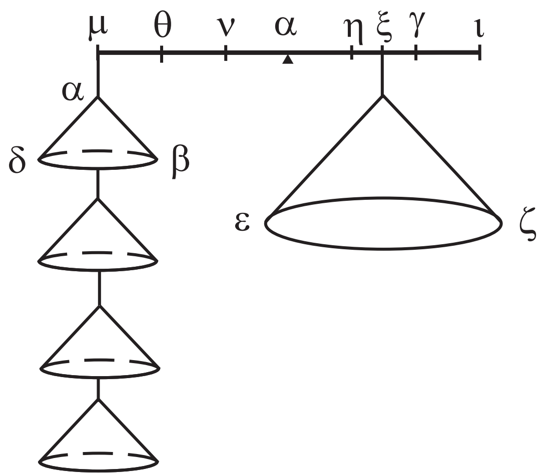


Figura A.10: L'equilibrio della leva nella figura A.9 non è alterato sostituendo il cono $\alpha\zeta\varepsilon$ distribuito uniformemente sul braccio della leva, con lo stesso cono appeso solo nel punto ξ, corrispondente al suo baricentro.

Allora secondo la legge della leva, equazione (2.1), abbiamo:

$$\frac{4(\text{Cono } \alpha\beta\delta)}{\text{Cono } \alpha\zeta\varepsilon} = \frac{\alpha\xi}{\alpha\mu} \ . \tag{A.10}$$

Ma per costruzione (figura A.2) sappiamo che:

$$\frac{\alpha\mu}{\alpha\gamma} = \frac{3}{2} \ . \tag{A.11}$$

Combinando le equazioni (A.9), (A.10) e (A.11) otteniamo:

$$\frac{1}{2} = \frac{\alpha\xi}{\frac{3}{2} \cdot \alpha\gamma} \ . \tag{A.12}$$

Ossia:

$$\alpha\xi = \frac{3}{4} \cdot \alpha\gamma \ . \tag{A.13}$$

Questo è il risultato che volevamo ottenere, che definisce la posizione del baricentro di un cono, e che fu usato da Archimede nel suo trattato *Metodo sui Teoremi Meccanici*.

Bibliografia

[AM12] A. K. T. Assis and C. P. Magnaghi. *The Illustrated Method of Archimedes: Utilizing the Law of the Lever to Calculate Areas, Volumes and Centers of Gravity*. Apeiron, Montreal, 2012. ISBN: 9780986492679. Disponibile in: www.ifi.unicamp.br/~assis.

[AM14] A. K. T. Assis and C. P. Magnaghi. *O Método Ilustrado de Arquimedes: Utilizando a Lei da Alavanca para Calcular Áreas, Volumes e Centros de Gravidade*. Apeiron, Montreal, 2014. ISBN: 9780992045678. Disponibile in: www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Arc63] Archimedes. Der Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen. In A. Czwalina, editor, *Archimedes Werke*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1963. Pp. 379-423. Tradotto da J. L. Heiberg e commentati da H. G. Zeuthen.

[Arc87] Archimedes. The Method of Mechanical Theorems. In E. J. Dijksterhuis, editor, *Archimedes*. Princeton University Press, Princeton, 1987. Capitolo X. Pp. 313-345. Tradotto da C. Dikshoorn.

[Arc02a] Archimedes. The Method of Archimedes. In T. L. Heath, editor, *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 2002. Pp. 1-51 (Supplemento). Tradotto da T. L. Heath.

[Arc02b] Archimedes. *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 2002. Traduzione e edizione in notazione moderna da T. L. Heath.

[Arc14] Archimede. *Metodo: Nel laboratorio del genio*. Bollati Boringhieri, Torino, 2014. A cura di F. Acerbi, C. Fontanari e M. Guardini.

[Ass96] A. K. T. Assis. Sobre os corpos flutuantes — tradução comentada de um texto de Arquimedes. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 16:69–80, 1996.

[Ass08] A. K. T. Assis. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Apeiron, Montreal, 2008. ISBN: 9780973291179. Disponibile in: www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass10] A. K. T. Assis. *Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics: The Law of the Lever.* Apeiron, Montreal, 2010. Seconda edizione. ISBN: 9780986492648. Disponibile in: www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Dij87] E. J. Dijksterhuis. *Archimedes.* Princeton University Press, Princeton, 1987. Tradotto da C. Dikshoorn.

[Euc56] Euclid. *The Thirteen Books of The Elements.* Dover, New York, 1956. Volume 3, Libros X-XIII. Tradotto con introduzione e commenti da Sir Thomas L. Heath.

[Gal70] G. Galilei. *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo.* Einaudi Editore, Torino, 1970.

[Gey06] M. Geymonat. *Il Grande Archimede.* Sandro Teti, Roma, 2006. Seconda edizione.

[Hea21] T. Heath. *A History of Greek Mathematics.* Clarendon Press, Oxford, 1921. Vol. II: From Aristarchus to Diophantus.

[Hei81] J. L. Heiberg. *Archimedis Opera.* Teubner, Leipzig, 1880-81.

[Kno79] W. Knorr. Archimedes' lost treatise on the centers of gravity of solids. *Mathematical Intelligencer*, 1:102–109, 1978-79.

[MA12] C. P. Magnaghi and A. K. T. Assis. Calculation of the centre of gravity of the cone utilizing the method of Archimedes. *European Journal of Physics*, 33:637–646, 2012. doi: 10.1088/0143-0807/33/3/637.

[Mag] C. P. Magnaghi. Análise e Tradução Comentada da Obra de Arquimedes Intitulada "Método sobre os Teoremas Mecânicos." Tese de mestrado, Universidade Estadual de Campinas—UNICAMP, Campinas, 2011. Disponibile in: webbif.ifi.unicamp.br/teses e www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Mug70] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 1: *De la Sphère et du Cylindre, La Mesure du Cercle, Sur les Conoïdes et les Sphéroïdes.* Budé, Paris, 1970.

[Mug71a] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 2: *Des Spirales, De l'Équilibre des Figures Planes, L'Arénaire, La Quadrature de la Parabole.* Budé, Paris, 1971.

[Mug71b] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 3: *Des Corps Flottants, Stomachion, La Méthode, Le Livre des Lemmes, Le Problème des Boeufs.* Budé, Paris, 1971.

[Mug72] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 4: *Commentaires d'Eutocius et Fragments.* Budé, Paris, 1972.

[Plu87] Plutarco. *La Vita di Marcello.* Felice Valgrisio, Venezia, 1587.

[Ruf61] E. Rufini. *Il "Metodo" di Archimede e le origine del calcolo infinitesimale nell'antichità.* Feltrinelli, Milano, 1961.

[Ste30] W. Stein. Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie. Abt. B: Quellen. I*, 1930. Pp. 221-244.

[Tit] Tito Livio. *Ab Urbe Condita.* Disponibile in: www.thelatinlibrary.com.

Nel 1906 Johan Ludvig Heiberg (1854-1928), grande filólogo e storico danese, trovò ad Istanbul un testo di Archimede (287-212 a. C.) fino allora sconosciuto. Si trattava di una lettera mandata ad Eratostene (285-194 a. C), scienziato greco responsabile della Biblioteca di Alessandria, in cui Archimede presentava un metodo euristico per calcolare aree, volumi e baricentri di figure geometriche, usando la legge della leva. In questo libro si presenta l'essenza del metodo di Archimede, concentrandosi sugli aspetti fisici. Tutte le leve in equilibrio sono illustrate con figure. Si enfatizzano i postulati usati nelle deduzioni. Si usa la matematica strettamente necessaria alle prove. Si presenta la definizione del centro di gravità dei corpi rigidi così come la sua determinazione sperimentale e teorica. Si discute in dettaglio la legge della leva. Si presentano anche i principali risultati matematici e geometrici ottenuti da Archimede relativi al cerchio e alla sfera. Il libro descrive i lemmi usati, passando in seguito alla parte principale dell'opera, in cui si presentano le dimostrazioni fisiche del teorema I (area di un segmento parabolico), del teorema II (volume di una sfera) e del teorema V (baricentro di un paraboloide di rotazione). Si discute l'importanza di questi tre teoremi. Nell'appendice si trova la dimostrazione della posizione del baricentro di un cono, fatta dagli autori, usando il metodo di Archimede. Alla fine del libro c'è una bibliografia con i principali trattati relativi a questo argomento.

Gli autori :

André K. T. Assis è nato a Juiz de Fora, Brasile, nel 1962. Ha ottenuto la laurea e il dottorato all'Istituto di Fisica della UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas, San Paolo, Brasile). Ha ottenuto un primo post-dottorato presso il Laboratorio Culham (Oxfordshire, Inghilterra, United Kingdom Atomic Energy Authority, 1988) e un secondo al Centro di Ricerche Elettromagnetiche della Northeastern University di Boston (USA, 1991-1992). Dall'agosto del 2001 al novembre del 2002, e da febbraio a maggio del 2009, ha lavorato presso l'Istituto per la Storia delle Scienze Naturali della Hamburg Universität (Amburgo, Germania), con borse per la ricerca concesse dalla Fondazione Alexander von Humboldt, Germania. Dall'aprile al giugno del 2014 ha lavorato presso la Technische Universität di Dresden, Germania, sempre con una borsa concessa dalla Fondazione Humboldt. È autore di diversi libri pubblicati in portoghese e in inglese, tra cui: *Weber's Electrodynamics* (1994), *Relational Mechanics* (1999), *Inductance and Force Calculations in Electrical Circuits* (con M. A. Bueno, 2001), *The Electric Force of a Current: Weber and the Surface Charges of Resistive Conductors Carrying Steady Currents* (con J. A. Hernandes, 2007), *Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics: The Law of the Lever* (2008 e 2010), *The Experimental and Historical Foundations of Electricity* (2010), *Ampère's Electrodynamics – Analysis of the Meaning and Evolution of Ampère's Force between Current Elements, together with a Complete Translation of His Masterpiece: Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Deduced from Experience* (con J. P. M. d. C. Chaib, 2011), *Weber's Planetary Model of the Atom* (con K. H. Widerkehr e G. Wolfschmidt, 2011), *Stephen Gray and the Discovery of Conductors and Insulators* (con S. L. B. Boss e J. J. Caluzi, 2012) e *Relational Mechanics and Implementation of Mach's Principle with Weber's Gravitational Force* (2014). È professore dell'Istituto di Fisica della UNICAMP dal 1989, orientando studenti nei corsi regolari di laurea e dottorato in fisica, e facendo ricerche sui fondamenti dell'elettromagnetismo, della gravitazione e della cosmologia.

Ceno P. Magnaghi è nato a Trento nel 1942. Dopo gli studi classici al Collegio San Carlo di Milano (1960), si è laureato in Ingegneria Chimica nel 1967 all'Università Cattolica di San Paolo (Brasile). Ha lavorato per più di trent'anni nell'industria chimica e petrolchimica in Brasile e in Argentina. Ha insegnato Petrolchimica e Impianti Chimici nella Facoltà di Ingegneria Chimica della UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas, San Paolo, Brasile). Ha ottenuto laurea (2007) e master (2011) in Fisica all'Istituto di Fisica della UNICAMP.

ISBN 978-1-987980-05-9
9 781987 980059 >